

Міністерство освіти і науки України
МАЛИННСЬКИЙ ЛІСОТЕХНІЧНИЙ КОЛЕДЖ

Вища математика

Тестові завдання

для контролю якості знань студентів
спеціальності 205 Лісове господарство

ОС Бакалавр

2020

Укладач: Якименко О.Г – старший викладач Малинського лісотехнічного коледжу,
кандидат педагогічних наук

Рецензент: Шемет О. І. – викладач-методист Малинського лісотехнічного коледжу

Розглянуто цикловою комісією
загальноосвітніх дисциплін
Протокол №__ від _____
Голова комісії Якименко О.Г.

В даній методичній розробці представлені тести призначені для підсумкового контролю. Вони проводяться після вивчення кожного з розділів дисципліни «Вища математика». Тестові завдання охоплюють основні теми згідно з навчальною програмою, мають декілька рівнів складності, проблемно орієнтують студентів на досягнення навчальних цілей, дають змогу перевірити ступінь засвоєння кожного розділу дисципліни.

Зміст

Вступ.....	4
Розділ I Елементи лінійної алгебри.....	8
Розділ II Аналітична геометрія.....	23
Розділ III Вступ до математичного аналізу.....	38
Розділ IV Диференціальне числення функції однієї змінної.....	50
Розділ V Диференціальне числення функції багатьох змінних.....	62
Розділ VI Інтегральне числення.....	76
Розділ VII Диференціальні рівняння.....	92
Відповіді.....	104
Висновки.....	119
Список літератури.....	120

Вступ

Контроль якості знань виступає важливою частиною навчального процесу. Педагогічний контроль має забезпечувати об'єктивне визначення рівня знань та вмінь в процесі вивчення теми, розділу, всього курсу.

Результативність в процесі навчання в багато чому залежить від досконало обробленої методики контролю знань. Перевірка і оцінювання знань, вмінь і навиків студентів – важливий елемент навчально-виховного процесу. Необхідність контролю пояснюється потребою в отриманні інформації про ефективність функціонування системи навчання. Від того, як організовано контроль, що забезпечує зворотній зв'язок, залежить результат навчальної діяльності студентів, виховання у них правильної самооцінки та почуття відповідальності.

Одна із форм контролю – тестування. В перекладі з англійської *test* – іспит, дослідження. Перспективи використання даного методу педагоги оцінюють не однозначно. Одним із недоліків тестового методу контролю знань вважається можливість угадування відповіді. Однак, цей недолік є характерним для тестів, що складаються із завдань на обрання відповіді із числа представлених. В даній методичній розробці цього недоліку позбулись запропонувавши декілька правильних відповідей на одне завдання. Запропоновано тести, що відрізняються за змістом, формою завдань, дидактично-психологічною орієнтацією.

В методичній розробці представлені тести призначені для підсумкового контролю. Вони проводяться після вивчення кожного з семи розділів дисципліни «Вища математика». Тестові завдання складені у вигляді різнорівневих завдань. Кожна контрольна робота складається з 5 варіантів. Кожний варіант складається з трьох різнорівневих частин.

I рівень (початковий і середній) – складається з 10 завдань, кожне з яких містить 4-5 варіантів відповідей, причому правильною може бути не одна, а декілька відповідей, це сприяє більш чіткому виявленню знань та знижує

можливість угадування. Кожне завдання оцінюється в 2 бали. Максимальна кількість балів – 20.

II рівень (достатній) – складається з трьох завдань. Містить завдання на відповідність та на самостійне розв’язування вправ студентами з коротким поясненням. Кожне завдання оцінюється в 3 бали. Максимальна кількість балів – 9.

Завдання III рівня (високого) – складається з двох завдань, вимагає від студентів наведення повного розв’язку задачі або розгорнутої відповіді на питання. В завданнях високо рівня оцінюється крім правильності, ще й повнота відповіді на питання або раціональний спосіб розв’язування задачі. Кожне завдання оцінюється в 4 бали. Максимальна кількість балів – 8.

Для полегшення роботи викладача при оцінюванні знань студентів в залежності від питомої ваги вірних відповідей запропоновано таку систему нарахування балів та оцінювання.

Система нарахування балів та оцінювання.

Процентне співвідношення кількості нарахованих балів до максимальної кількості балів	Кількість набраних балів	Оцінка
0% – 30%	0 – 11	2
31% – 60%	12 – 22	3
61% – 90%	23 – 33	4
91% – 100%	34 – 37	5

Після виконання тестових завдань студент повинен

Знати:

- означення визначника другого, третього n -го порядку та їх властивості;
- правило Крамера;
- матриці та їх властивості;
- означення оберненої матриці, правило її знаходження;
- рівняння прямої на площині, в просторі;
- рівняння площини;

- умови паралельності, перпендикулярності прямих;
- кут між прямими;
- рівняння кривих другого порядку: кола, еліпса, гіперболи, параболи;
- властивості кривих другого порядку;
- означення границі послідовності;
- означення границі функцій у точці;
- основні теореми про границі;
- означення неперервної функції;
- означення похідної, диференціала функції;
- геометричний та фізичний зміст похідної, диференціала;
- основні теореми диференціального числення;
- таблиця похідних основних елементарних функцій;
- теореми про необхідні і достатні умови існування екстремуму функції;
- означення функцій багатьох змінних, частинних похідних;
- теорему про необхідну умову існування точок екстремуму функцій двох змінних;
- означення первісної, невизначеного і визначеного інтеграла;
- основні методи інтегрування;
- формулу Ньютона-Лейбніца;
- означення диференціального рівняння першого порядку, рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними, розв'язку диференціального рівняння.

Уміти:

- ✎ обчислювати визначника другого, третього n -го порядку;
- ✎ розв'язувати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера;
- ✎ виконувати дії над матрицями;
- ✎ знаходити обернену матрицю;
- ✎ розв'язувати систему лінійних рівнянь матричним способом;
- ✎ розв'язувати систему лінійних рівнянь методом Гаусса;
- ✎ досліджувати взаємне розміщення прямих;

- ✧ знаходити кут між прямими;
- ✧ досліджувати властивості і будувати лінії другого порядку;
- ✧ будувати та перетворювати графіки функцій;
- ✧ обчислювати границі функцій;
- ✧ досліджувати функції на неперервність;
- ✧ знаходити похідні;
- ✧ застосовувати похідні до дослідження і побудови графіків функцій;
- ✧ знаходити найбільше та найменше значення функції на відрізку;
- ✧ досліджувати функції двох змінних на екстремум;
- ✧ знаходити невизначений інтеграл;
- ✧ обчислювати визначений інтеграл;
- ✧ обчислювати площу фігур та об'єми тіл за допомогою визначеного інтеграла;
- ✧ застосовувати інтеграл до розв'язування прикладних задач;
- ✧ розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку.

І Елементи лінійної алгебри

Варіант 1

Початковий і середній рівень

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

- 1.1 Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, то матриця $4A$ має вигляд
- А) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$ Д) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 12 & -2 \end{pmatrix}$

- 1.2 Квадратну матрицю називають трикутною, якщо

- А) всі її елементи, які розміщені нижче побічної діагоналі, дорівнюють нулю
Б) всі її елементи, які розміщені нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю
В) всі її елементи, які не лежать на побічній діагоналі, дорівнюють нулю
Г) всі її елементи, які не лежать на головної діагоналі, дорівнюють нулю
Д) всі її елементи, які лежать на головної діагоналі, обов'язково дорівнюють нулю

- 1.3 Чому дорівнює ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$?

- А) $r(A) = 1$ Б) $r(A) = 2$ В) $r(A) = 3$ Г) $r(A) = 4$ Д) $r(A) = 5$

- 1.4 Серед поданих тверджень оберіть правильне:

- А) Обернена матриця A^{-1} існує, якщо $\det A \neq 0$
Б) Обернена матриця A^{-1} існує, якщо матриця A – квадратна
В) Обернена матриця A^{-1} існує, якщо матриця A – квадратна та $\det A \neq 0$
Г) Обернена матриця A^{-1} існує, якщо матриця A – діагональна

- 1.5 Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

- А) 1 Б) 34 В) -6 Г) 0 Д) 46

- 1.6 При заміні деякого рядка не виродженої квадратної матриці на суму цього рядка та будь-якого іншого, помноженого на число α , визначник...

- А) не зміниться Б) змінить знак В) збільшиться в α раз
Г) стане рівним нулю Д) зменшиться в два рази

1.7 Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то визначник матриці $A \cdot B$ дорівнює...

А) 16 Б) -32 В) 8 Г) 0 Д) -8

1.8 Елемент a_{ij}^{-1} оберненої матриці A^{-1} (у випадку існування) обчислюється за формулою...

А) $\frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ji}$, де M_{ji} – мінор елемента a_{ji} матриці A

Б) $\frac{1}{|a_{ij}|} \cdot (-1)^{i+j}$, де a_{ji} – елемент матриці A

В) $\frac{1}{\det A} \cdot M_{ji}$, де M_{ji} – мінор елемента a_{ji} матриці A

Г) $\frac{1}{a_{ij}} \cdot (-1)^{i+j}$, де a_{ji} – елемент матриці A

Д) $\frac{1}{a_{ij}}$, де a_{ji} – елемент матриці A

Е) $\frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, де M_{ji} – мінор елемента a_{ji} матриці A

1.9 Якщо матриця системи n рівнянь є квадратною та її визначник не дорівнює нулю, то система ...

А) не має розв'язків

Б) має єдиний розв'язок

В) має не більше ніж n розв'язків

Г) має рівно n розв'язків

Д) має нескінчену кількість розв'язків

1.10 В системі $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$ стовпчиком вільних членів буде...

А) $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$

Б) $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$

В) $\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$

Г) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Д) $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Встановіть відповідність між визначником та числом α , що перетворює даний визначник у нуль.

А	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2\alpha - 3 \end{vmatrix}$
Б	$\begin{vmatrix} 3 & -\alpha \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$
В	$\begin{vmatrix} 6 + 4\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
Г	$\begin{vmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

1) 12
2) $-\frac{3}{2}$
3) -1
4) -12
5) $\frac{3}{2}$
6) -6

2.2 Знайдіть розв'язок системи $\begin{cases} 3x - 7y = 33 \\ 5x + 6y = 2 \end{cases}$ (відповідь запишіть у вигляді пари чисел)

2.3 Розмістіть матриці в порядку збільшення їх визначників (відповідь запишіть у вигляді послідовності чисел)

1	2	3	4	5
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника Δn -го порядку називається..., на перетині яких розміщується...

3.2 За допомогою методу Крамера розв'яжіть систему лінійних алгебраїчних

$$\text{рівнянь (розпишіть все поетапно): } \begin{cases} 2x - y - 3z = 3 \\ 3x + 4y - 5z = -8 \\ 2y + 7z = 17 \end{cases}$$

Варіант 2
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

- 1.1 Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, то матриця $3A - 2B$ має вигляд
- А) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ -6 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ Г) $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -10 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ Д) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -18 & 10 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

- 1.2 Матриця називається одиничною, якщо

- А) вона є діагональною і всі елементи головної діагоналі одиниці
Б) вона є квадратною і всі елементи побічної діагоналі одиниці
В) вона є діагональною і всі її елементи одиниці
Г) вона є квадратною і всі елементи окрім елементів головної діагоналі одиниці
Д) серед поданих відповідей не має правильної

- 1.3 Знайдіть матрицю транспоновану до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

- А) $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ Б) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ В) $A^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$
Г) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Д) $A^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- 1.4 Для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ вкажіть суму елементів, розміщених на побічній діагоналі
- А) 3 Б) 6 В) -16 Г) -3 Д) -4

- 1.5 Якщо поміняти містами два рядка(стовпчика) квадратної матриці, то визначник...

- А) зменшиться в два рази Б) збільшиться в два рази В) змінить знак
Г) стане рівним нулю Д) не зміниться

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.6 Алгебраїчне доповнення A_{12} елемента a_{12} матриці дорівнює...

A) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Б) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$

В) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Г) $-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Д) правильна відповідь відсутня

1.7 Знайдіть число c , яке перетворює визначник $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2c-1 \end{vmatrix}$ у нуль

A) $\frac{1}{2}$

Б) $-\frac{1}{2}$

В) 2

Г) 4

Д) правильна відповідь відсутня

1.8 Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

A) 120

Б) 269

В) 0

Г) -98

Д) -315

1.9 В системі $\begin{cases} 5x_1 + x_3 + 20x_4 = 2 \\ 5x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$ які змінні можна вважати базисними?

A) x_1, x_2

Б) x_1, x_2, x_3

В) x_1, x_2, x_5

Г) x_1, x_3, x_5

Д) x_3, x_4, x_5

Е) x_1, x_2, x_3, x_4

1.10 Визначник системи $\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 2x + 6y = 12 \end{cases}$ дорівнює

A) 8

Б) 36

В) -8

Г) 0

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1 Для матриць A і B знайдіть елемент c_{23} добутку $C = B \cdot A$ (відповідь запишіть цілим числом)

2.2 Вкажіть, з яким знаком («плюс» чи «мінус») добутки входять до визначника

третього порядку $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

1	2	3	4	5	6
$a_{11} a_{22} a_{33}$	$a_{13} a_{22} a_{31}$	$a_{12} a_{21} a_{33}$	$a_{12} a_{23} a_{31}$	$a_{13} a_{21} a_{32}$	$a_{11} a_{23} a_{32}$

2.3 Знайдіть суму елементів головної діагоналі визначника матриці B , якщо

$$B = A \cdot A^T \text{ і } A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ (відповідь запишіть цілим числом)}$$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалину у наступному означенні:

Процес... називають транспонуванням матриці.

3.2 Розв'яжіть систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ методом Гаусса (розпишіть все поетапно).

Варіант 3
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Ранг матриці A , що має розмірність $n \times n$, дорівнює...

- А) n
- Б) $n - 1$, якщо матриця вироджена
- В) вказаних умов недостатньо для визначення рангу
- Г) $n - 1$
- Д) $n - 1$, якщо матриця не вироджена

1.2 Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, то матриця $A \cdot B$ має вигляд

- А) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Б) $\begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}$
- В) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$
- Г) $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$
- Д) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$

1.3 Знайдіть трикутну матрицю

- А) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Б) $\begin{pmatrix} 8 & 6 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- В) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- Г) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- Д) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1.4 Серед поданих рівностей оберіть правильну:

- А) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = A$
- Б) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = 1$
- В) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = A^T$
- Г) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця

1.5 Відомо, що визначник квадратної матриці A дорівнює Δ . Вкажіть, чому буде дорівнювати визначник матриці, отриманої з матриці A у якої перший рядок перемножили на число -3 .

- А) Δ
- Б) $-\Delta$
- В) -3Δ
- Г) $-\frac{1}{3}\Delta$
- Д) $\frac{1}{3}\Delta$

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & b & 2 \\ 3 & c & 1 \end{vmatrix}$$

1.6 Розкладіть визначник за другим стовпчиком

- А) $-4a + b - 2c$
- Б) $-a + 2b + 3c$
- В) правильна відповідь відсутня
- Г) $4a + b + 2c$
- Д) $4a - b + 2c$

1.7 Який з поданих нижче визначників дорівнює нулю?

А) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ Б) $\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 10 \\ 17 & 4 \end{vmatrix}$ В) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ Г) $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$

1.8 Знайдіть добуток елементів побічної діагоналі визначника $\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 8 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

- А) -6 Б) 8 В) -8 Г) 12 Д) 24

1.9 При розв'язуванні системи $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 3x - 4y = 7 \end{cases}$ за формулою Крамера

А) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

Б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

В) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

Г) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}$

Д) $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

1.10 Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають сумісною?

- А) яка має хоча б один розв'язок
Б) яка не має жодного розв'язку
В) яка має два і більше розв'язки
Г) яка має безліч розв'язків

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Встановіть відповідність між словесним формулюванням властивостей операцій над довільними матрицями A, B, C і дійсними числами α, β та формульним представленням властивостей

А	Комутативний закон додавання матриць
Б	Асоціативний закон додавання матриць
В	Дистрибутивний закон множення на число відносно додавання матриць
Г	Дистрибутивний закон множення на матрицю відносно додавання чисел
Д	Дистрибутивний закон множення на матрицю відносно додавання матриць

1)	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
2)	$A + B = B + A$
3)	$\alpha \cdot (A \pm B) = \alpha \cdot A \pm \alpha \cdot B$
4)	$A \cdot (\alpha \pm \beta) = \alpha \cdot A \pm \beta \cdot A$
5)	$(A + B) + C = A + (B + C)$
6)	$A \cdot (B \pm C) = A \cdot B \pm A \cdot C$

2.2 Знайдіть визначник матриці B , якщо $B = A \cdot A^T$ і $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
(відповідь запишіть цілим числом)

2.3 Розмістіть матриці в порядку зменшення їх визначників (відповідь запишіть у вигляді послідовності чисел)

$$1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Високий рівень Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Систему лінійних рівнянь називають сумісною.... Якщо ж система... , то її називають несумісною.

3.2 Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 4
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Квадратна матриця називається діагональною, якщо

- А) елементи, що лежать на побічній діагоналі, дорівнюють нулю
- Б) елементи, що лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю
- В) елементи, що не лежать на головній діагоналі, дорівнюють нулю
- Г) елементи, що лежать нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю
- Д) елементи, що лежать на головній діагоналі, обов'язково рівні

1.2 Знайдіть матрицю транспоновану до матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

- А) $A^T = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$
- Б) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$
- В) $A^T = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
- Г) $A^T = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
- Д) $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

1.3 Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 10 & -12 & 8 \end{pmatrix}$, то матриця $0,5A$ має вигляд

- А) $A = \begin{pmatrix} -10 & 30 & 20 \\ 50 & -60 & 40 \end{pmatrix}$
- Б) $A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,2 \\ 0,5 & -0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$
- В) $A = \begin{pmatrix} -2,5 & 6,5 & 4,5 \\ 10,5 & -12,5 & 8,5 \end{pmatrix}$
- Г) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$
- Д) $A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 20 & -24 & 16 \end{pmatrix}$

1.4 Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, то елемент a_{23}^{-1} , матриці оберненої до A , дорівнює...

- А) -4
- Б) 2
- В) 4
- Г) $\frac{1}{4}$
- Д) $-\frac{1}{4}$

1.5 Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то визначник матриці $A \cdot B$ дорівнює...

- А) 10
- Б) -3
- В) 12
- Г) -7
- Д) правильна відповідь відсутня

1.6 Серед властивостей визначників оберіть неправильну

- А) при транспонуванні матриці значення відповідного визначника не змінюється
- Б) якщо визначник містить два однакових рядки(стовпчики), то він дорівнює нулю
- В) якщо визначник містить пропорційні рядки(стовпчики), то він дорівнює нулю
- Г) якщо два рядки(стовпчики) визначника поміняти місцями, то визначник не зміниться

1.7 Якщо всі елементи деякого рядка(стовпчика) визначника, домножити на деяке дійсне число λ , то значення визначника...

- А) не зміниться
- Б) стане рівним нулю
- В) зміниться в $\frac{1}{\lambda}$ разів
- Г) зміниться в λ разів

1.8 Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, то визначник матриці $A \cdot B$ дорівнює...

- А) 0
- Б) -6
- В) 32
- Г) 2
- Д) -32

1.9 Яку систему лінійних алгебраїчних рівнянь називають несумісною?

- А) яка має хоча б один розв'язок
- Б) яка не має жодного розв'язку
- В) яка має два і більше розв'язки
- Г) яка має безліч розв'язків

1.10 Для системи $\begin{cases} 3x + 7y = 5 \\ 8x + 6y = 2 \end{cases}$ знайдіть Δ_1

- А) 16
- Б) -38
- В) 22
- Г) 0
- Д) правильна відповідь відсутня

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть значення α , при якому матриця $D = A^2 + (C^{-1}B^{-1})^{-1}$ буде

дорівнювати матриці BC , якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$, а квадратні матриці B і C не вироджені, тобто $\det B \neq 0$, $\det C \neq 0$ (відповідь запишіть цілим числом)

2.2 Знайдіть розв'язок системи $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$ (відповідь запишіть у вигляді пари чисел)

2.3 Встановіть відповідність між видами матриць та їх описом

А	Нульова матриця	1)	всі її елементи розміщені нижче головної діагоналі дорівнюють нулю
Б	Одинична матриця	2)	всі її елементи дорівнюють одиниці
В	Діагональна матриця	3)	елементи її головної діагоналі одиниці, а всі інші – нулі
Г	Трикутна матриця	4)	всі її елементи дорівнюють нулю
		5)	всі її елементи, окрім елементів головної діагоналі дорівнюють нулю

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалину у теоремі Кронекера-Капелі:

Для того щоб система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n змінними була сумісною, необхідно...

3.2 Доведіть, що матриця $\begin{pmatrix} \frac{2}{6} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -3 \\ \frac{6}{6} & \frac{6}{6} & \frac{-3}{6} \\ -2 & 0 & 6 \\ \frac{6}{6} & 0 & \frac{6}{6} \end{pmatrix}$ є оберненою до матриці $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Варіант 5
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 При множенні матриці A на матрицю B повинна виконуватись вимога

- А) кількість рядків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B
- Б) кількість рядків матриці A дорівнює кількості стовпчиків матриці B
- В) кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості стовпчиків матриці B
- Г) кількість стовпчиків матриці A дорівнює кількості рядків матриці B
- Д) серед поданих відповідей не має правильної

1.2 Чому дорівнює ранг матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

- А) $r(A) = 5$ Б) $r(A) = 4$ В) $r(A) = 3$ Г) $r(A) = 2$ Д) $r(A) = 1$

1.3 Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$, то матриця $4A - 3B$ має вигляд

- А) $\begin{pmatrix} -16 & -1 \\ 2 & -18 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$
Г) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$ Д) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 8 & -18 \end{pmatrix}$

1.4 Вкажіть матриці, які мають обернені матриці

- А) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ Б) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ В) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
Г) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ Д) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5 Для матриць
можливо виконати

- А) $A \cdot B$ Б) $B \cdot A$ В) $B^T \cdot A^T$ Г) $A^T \cdot B^T$ Д) $B \cdot A^T$ Е) $A \cdot B^T$

1.6 Обчисліть визначник $\begin{vmatrix} -1 & 7 & -5 \\ 2 & 3 & 10 \\ 4 & 15 & 20 \end{vmatrix}$

А) -19

Б) 164

В) 1

Г) -112

Д) 0

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1.7 Алгебраїчне доповнення A_{13} елемента a_{13} матриці дорівнює...

А) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

Б) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

В) $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Г) $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$

Д) правильна відповідь відсутня

1.8 Розкладіть визначник $\det A = \begin{vmatrix} 0 & a & -1 \\ 1 & b & 2 \\ 2 & c & 3 \end{vmatrix}$ за другим стовпчиком

А) $a + 2b - c$

Б) $-a + 2b + c$

В) $2a + b - 3c$

Г) $a - 2b - c$

Д) правильна відповідь відсутня

1.9 При розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь за правилом Крамера, яку використовують формулу?

А) $x_i = \Delta + \Delta_i$

Б) $x_i = \Delta - \Delta_i$

В) $x_i = \Delta_i \cdot \Delta$

Г) $x_i = \frac{\Delta}{\Delta_i}$

Д) $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$

1.10 Скільки розв'язків має система лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 14 \\ 11x_2 - 2x_3 = 46 \end{cases}$?

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

Д) безліч

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Встановіть відповідність між матрицями A і B та їх добутком $B \cdot A$

А	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	1) $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
Б	$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	2) $\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
В	$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = (-2 \ 3)$	3) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$
Г	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$
		5) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

2.2 Знайдіть розв'язок системи $\begin{cases} -x + 2y = 8 \\ 5x - 4y = 2 \end{cases}$ (відповідь запишіть у вигляді пари чисел)

2.3 Для матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ знайдіть елемент c_{13} добутку $C = A^T \cdot B$ (відповідь запишіть цілим числом)

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалину у наступному означені:

Рангом матриці A називається...

3.2 Доведіть, що добуток матриці A на одиничну матрицю E , дорівнює самій матриці A

II Аналітична геометрія

Варіант 1

Початковий і середній рівень

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Необхідною і достатньою умовою паралельності прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 є...

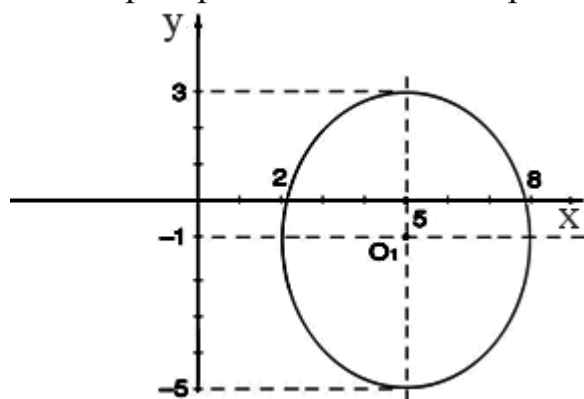
A) $k_1 + k_2 = 0$

Б) $k_1 = k_2$

В) $k_1 \cdot k_2 = +1$

Г) $k_1 \cdot k_2 = -1$

1.2 Оберіть рівняння еліпса зображеного на малюнку.



A) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Б) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

В) $\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$

Г) $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

1.3 Що вивчає аналітична геометрія з допомогою особливого методу, що має назву метод координат?

A) властивості геометричних ліній, фігур, тіл, поверхонь

Б) різні види рівнянь прямої, еліпса, параболи

В) положення точок, фігур, поверхонь

Г) властивості прямої, еліпса, параболи

1.4 Знайдіть координати фокуса параболи $y^2 = 12x$

A) $F(3; 0)$

Б) $F(12; 0)$

В) $F(0; 4)$

Г) $F(6; 0)$

Д) правильна відповідь відсутня

1.5 Рівняння виду $y = kx$, де k – кутовий коефіцієнт є

A) рівняння осі Ox

Б) рівняння прямої, паралельної осі Ox

В) рівняння осі Oy

Г) рівняння прямої, паралельної осі Oy

Д) рівняння прямої, що проходить через початок координат

Е) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом та початковою ординатою

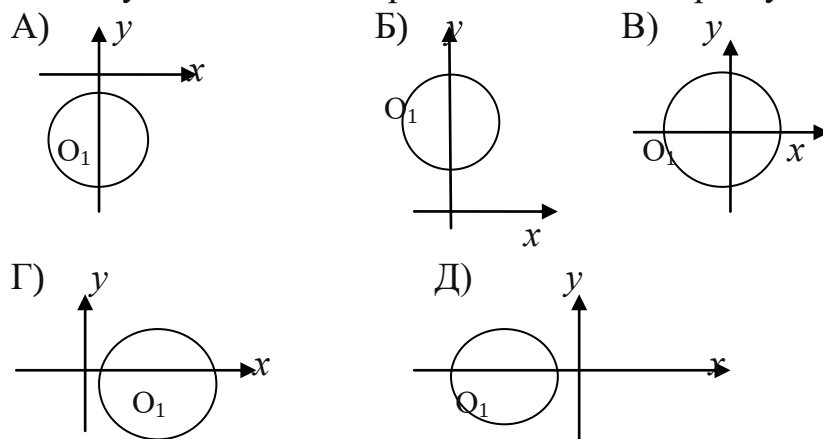
1.6 Яка з рівностей представляє собою рівняння асимптот гіперболи?

- А) $y = \pm \frac{b}{a}x$ Б) $y = \pm \frac{a}{b}x$ В) $x = \pm \frac{b}{a}$
 Г) $y = \pm \frac{a}{b}$ Д) правильна відповідь відсутня

1.7 Рівняння виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$ є...

- А) канонічним рівнянням кола
 Б) канонічним рівнянням еліпса
 В) канонічним рівнянням гіперболи
 Г) канонічним рівнянням параболи

1.8 На якому з малюнків зображено коло з центром у точці $O_1(0; -b)$?



1.9 Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $(1; -3)$ і утворює з віссю Ox кут $\arctg 2$

- А) $-2x + y + 5 = 0$ Б) $-3x + y + 2 = 0$ В) $x - 3y - 2 = 0$
 Г) $2x - y - 5 = 0$ Д) $y = x - 3$

1.10 Яка з точок є точкою перетину рівнобічної гіперболи $x^2 + y^2 = 16$ з колом $x^2 + y^2 = 34$?

- А) $(2; 3)$ Б) $(-5; 0)$ В) $(-5; -3)$ Г) $(5; 4)$ Д) $(0; 0)$

Достатній рівень Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Рівняння рівносторонньої гіперболи має наступний вигляд: $\square - y^2 = \square$ (заповніть прогалини)

2.2 Дві прямі задані рівняннями $y = 2x + 3$, $y = -3x + 2$. Знайдіть гострий кут між ними (в градусах). Відповідь запишіть цілим числом.

2.3 Встановіть відповідність між рівняннями прямих та їх кутовими коефіцієнтами.

А	$x - y - 5 = 0$
Б	$6x - 3y + 7 = 0$
В	$3x + 2y - 1 = 0$
Г	$8x + 4y - 9 = 0$

1)	2
2)	$\frac{4}{5}$
3)	-2
4)	1
5)	$-\frac{3}{2}$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означені:

Параболою називається ... , відстань від яких до заданої точки дорівнює ...

3.2 Покажіть, що рівняння кола є частковим видом загального рівняння другого степеня

Варіант 2
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 є...

А) $k_1 + k_2 = 1$

Б) $k_1 = k_2$

В) $k_1 \cdot k_2 = -1$

Г) $k_2 = \frac{1}{k_1}$

Д) $k_2 = -\frac{1}{k_1}$

1.2 Який вигляд має канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки

$M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ і $N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$?

А) $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$

Б) $x^2 + \frac{y^2}{10} = 1$

В) $x^2 + 10y^2 = 10$

Г) $10x^2 + y^2 = 10$

1.3 Чому дорівнює тангенс кута між прямими $2x - 3y + 6 = 0$ та $x + 5y - 2 = 0$?

А) 1

Б) ± 1

В) $\pm\sqrt{3}$

Г) $-\sqrt{3}$

Д) правильна відповідь відсутня

1.4 Рівняння кола радіуса r з центром у початку координат має наступний вигляд...

А) $(x - a)^2 + y^2 = r^2$

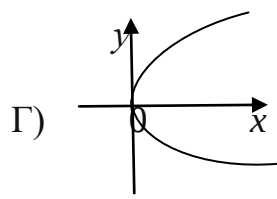
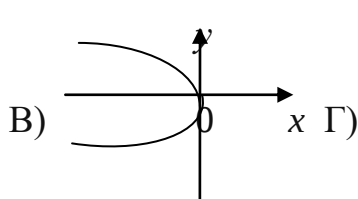
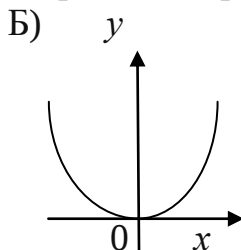
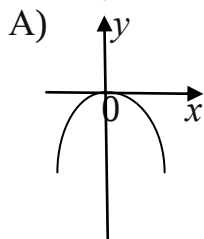
Б) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

В) $x^2 - y^2 = r^2$

Г) $x^2 + y^2 = r^2$

Д) $x^2 + y^2 = 1$

1.5 На якому з малюнків зображено параболу $x^2 = -2py$?



1.6 Яка з рівностей представляє собою рівняння гіперболи?

- А) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Б) $y = 2px$; В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
 Г) $x^2 + y^2 = r^2$ Д) правильна відповідь відсутня

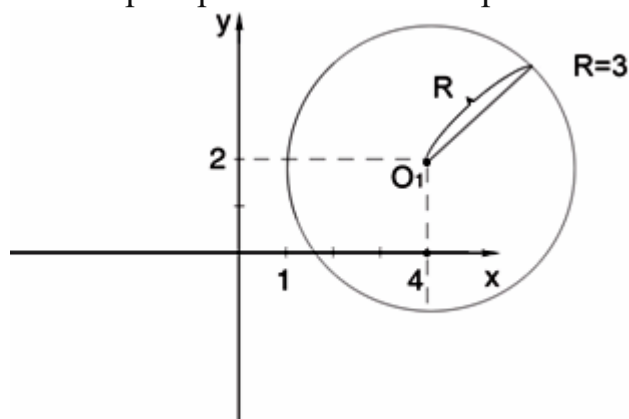
1.7 Знайдіть довжину великої осі еліпса $16x^2 + 25y^2 = 400$

- А) 4 Б) 10 В) 8 Г) 5 Д) 16

1.8 Кожній парі дійсних чисел x та y на площині ...

- А) відповідає одна точка
 Б) відповідають дві точки
 В) відповідають три точки
 Г) відповідають безліч точок

1.9 Оберіть рівняння кола зображеного на малюнку



- А) $x^2 + y^2 = 9$
 Б) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$
 В) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 9$
 Г) $(x - 4)^2 - (y - 2)^2 = 9$

1.10 Знайдіть рівняння гіперболи, фокуси якої мають координати $(\pm 4; 0)$, а дійсна вісь дорівнює 6

- А) $7x^2 - 9y^2 = 1$ Б) $x^2 + y^2 = 16$ В) $16x^2 + y^2 = 36$
 Г) $9x^2 + 7y^2 = 16$ Д) $7x^2 - 9y^2 = 63$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Заповніть прогалини:

Ексцентриситетом еліпса називається відношення ... до довжини великої осі, тобто $\frac{\square}{2a} = \frac{\square}{a}$

2.2 Знайдіть відстань між паралельними прямими $3x + 4y - 24 = 0$ і $3x + 4y + 6 = 0$. Відповідь запишіть цілим числом.

2.3 Встановіть відповідність між різними видами рівнянь прямих та їх формою запису.

А	$y - y_1 = k(x - x_1)$
Б	$Ax + By + C = 0, A^2 + B^2 \neq 0$
В	$y = kx + b$
Г	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$
Д	$Ax + By + Cz = 0$
Е	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; a, b \neq 0$

1)	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k
2)	Рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ з заданим кутовим коефіцієнтом k
3)	Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$, якщо $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$
4)	Загальне рівняння прямої
5)	Рівняння прямої у відрізках

Високий рівень
Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

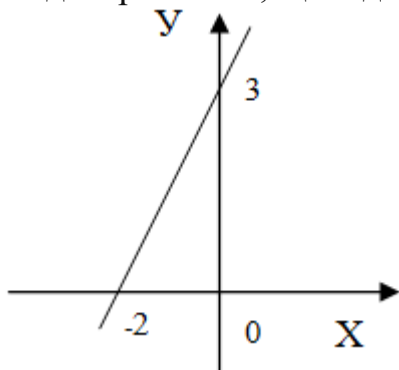
3.1 Зробіть порівняльну характеристику еліпса і гіперболи.

3.2 Камінь, кинутий під гострим кутом до горизонту, описав дугу параболи та упав на відстані 20м від початкового положення. Найбільша висота, досягнута каменем, дорівнює 10м. Визначить параметр параболічної траєкторії (розпишіть все поетапно).

Варіант 3
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Знайдіть рівняння, що відповідає прямій зображеній на малюнку.



А) $3x + 2y + 6 = 0$

Б) $3y - 2x = 1$

В) $\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$

Г) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

1.2 Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $(-1; -0,5)$ та утворює з віссю Ox кут $\arctg 2$

А) $4x + 2y + 5 = 0$

Б) $-x - 0,5y + 2 = 0$

В) $5x + y - 1 = 0$

Г) $x^2 + 2y^2 + 5 = 0$

Д) $x + 2y = 1$

1.3 Кого вважають творцем аналітичної геометрії?

А) Фалеса Мілетського

Б) Рене Декарта

В) В. І. Арнольда

Г) Піфагора

Д) правильна відповідь відсутня

1.4 Знайти довжину малої осі еліпса $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$

А) 12

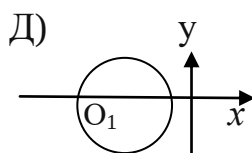
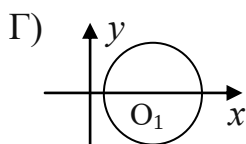
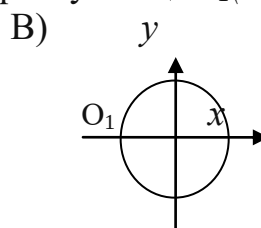
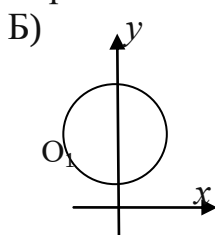
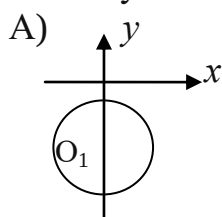
Б) 26

В) 13

Г) 1

Д) 24

1.5 На якому з малюнків зображено коло з центром у точці $O_1(a; 0)$



1.6 Яка з поданих нижче точок лежить на гіперболі $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$?

- А) $(2\sqrt{2}; 8)$ Б) $(\sqrt{3}; 4)$ В) $(3; 2\sqrt{6})$
 Г) $(8; 6\sqrt{3})$ Д) *правильна відповідь відсутня*

1.7 Коло є окремим випадком еліпса, у якого півосі рівні між собою і ...

- А) $e = -1$ Б) $e = 0$ В) $e = 1$
 Г) e не існує Д) *правильна відповідь відсутня*

1.8 Написати рівняння параболи вершина якої знаходиться у початку координат, а фокус $F(0; -4)$

- А) $y^2 = -4x$ Б) $y^2 = 4x$ В) $x^2 = -8y$
 Г) $x^2 = 16y$ Д) $x^2 = -16y$

1.9 Знайдіть рівняння еліпса, дві вершини якого мають координати $(\pm 4; 0)$, а один із фокусів – координати $(2; 0)$

- А) $3x^2 + 4y^2 = 48$ Б) $16x^2 + y^2 = 1$
 В) $2x^2 - 2y^2 = 16$ Г) $4x^2 + 3y^2 = 48$

1.10 Якщо рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то рівняння спряженої гіперболи...

- А) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Б) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ В) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$
 Г) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ Д) $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Колом називається ... від однієї точки,

2.2 Встановіть відповідність між кривими другого порядку та їх канонічними рівняннями.

А	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Б	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a \neq b)$
В	$x^2 + y^2 = R^2$
Г	$y^2 = 2px$

1)	коло
2)	еліпс
3)	гіпербола
4)	парабола

2.3 З початку координат проведено дві взаємно перпендикулярні прямі, які утворюють разом з прямою $2x + y = 5$ рівнобедрений трикутник. Знайдіть площу цього трикутника.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Нехай маємо рівняння двох прямих $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$. Виведіть формулу для визначення кута між цими прямими.

3.2 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Еліпсом називається ..., сума відстаней від кожної з яких

Варіант 4
Початковий і середній рівень
Частина I

1.1 Серед прямих оберіть перпендикулярні.

А) $3x - 2y + 7 = 0$

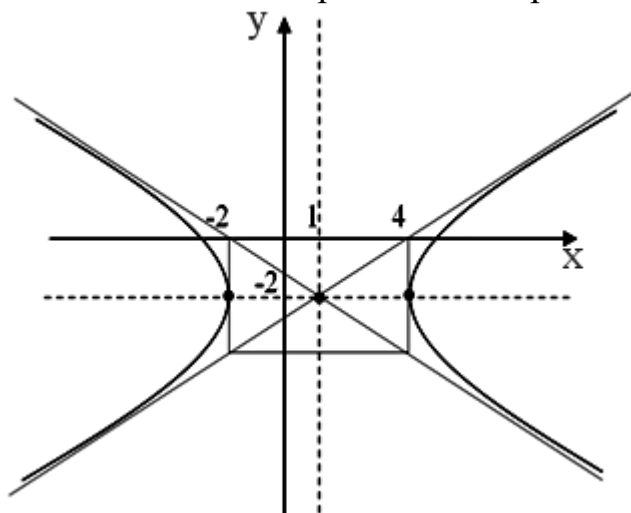
Б) $12x + 8y - 9 = 0$

В) $6x + 4y - 5 = 0$

Г) $2x + 3y - 6 = 0$

Д) правильна відповідь відсутня

1.2 Який вигляд має рівняння гіперболи зображеної на малюнку?



А) $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{9} = 1$

Б) $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

В) $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Г) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$

1.3 Який вигляд має рівняння прямої, що проходить через початок координат?

А) $y = kx + b$

Б) $y = kx^2$

В) $y = kx$

Г) $y = k$

1.4 Який вигляд має рівняння кола з центром в точці $O_1(-1; 2)$ та $r = 5$?

А) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Б) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$

В) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

Г) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

Д) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

1.5 Під яким кутом перетинаються асимптоти рівносторонньої гіперболи?

А) 45°

Б) 30°

В) 90°

Г) 120°

Д) правильна відповідь відсутня

1.6 Дві точки $(4; \sqrt{5})$ і $(-4\sqrt{3}; 5)$ лежать на гіперболі, її фокуси належать осі Ox . Яким буде рівняння цієї гіперболи?

А) $5x^2 - 8y^2 = 40$

Б) $6x^2 + 4y^2 = 10$

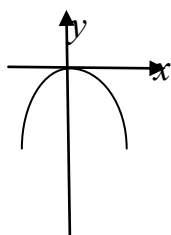
В) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

Г) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$

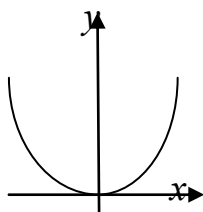
Д) правильна відповідь відсутня

1.7 На якому з малюнків зображено параболу $y^2 = -2px$?

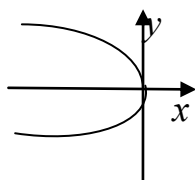
А)



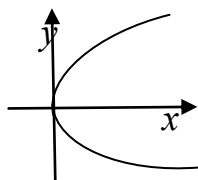
Б)



В)



Г)



1.8 Який вигляд матиме рівняння еліпса півосі якого дорівнюють 10 і 6?

А) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

Б) $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$

В) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Г) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

1.9 Яке коло буде симетричним колу $x^2 + y^2 = 2x + 4y - 4$ відносно прямої $x - y - 3 = 0$?

А) $(x - 9)^2 + (y - 2)^2 = 1$

Б) $(x - 1)^2 + (y + 6)^2 = 1$

В) $(x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$

Г) $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$

1.10 За якою формулою обчислюється відстань d від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$?

А) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Б) $d = \sqrt{Ax_0^2 + By_0^2 + C}$

В) $d = |Ax_0 + By_0 + C|$

Г) $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Рівняння кола з центром на осі Ox має наступний вигляд:

$\square^2 + \square^2 = \square$ (заповніть прогалини).

2.2 Визначить тип кривої: $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$

2.3 Встановіть відповідність між рівнянням гіперболи та її ексцентриситетом.

А	$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$	1)	$\frac{\sqrt{13}}{3}$
Б	$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$	2)	$\frac{5}{13}$
В	$4x^2 - 9y^2 = 36$	3)	$\frac{\sqrt{29}}{2}$
Г	$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$	4)	$\frac{13}{12}$
		5)	$\frac{5}{4}$

Високий рівень
Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Знайдіть точку перетину еліпса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{12} = 1$ з прямою $2x - y - 9 = 0$ (розпишіть все поетапно).

3.2 З $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2} + y^2 = x + \frac{p}{2}$ (рівняння параболу відносно вибраної системи координат) вивести найпростіше рівняння параболу $y^2 = 2px$

Варіант 5
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

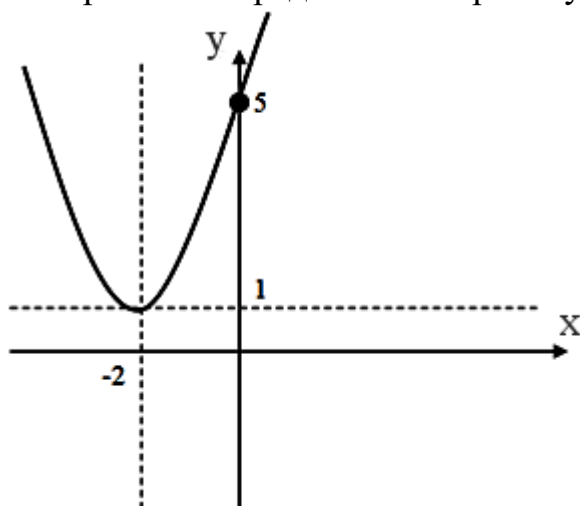
1.1 Визначить які три з точок $A(1; 4)$; $B(-2; 1)$; $C(-1; 7)$; $D(3; 1)$ лежать на одній прямій.

- A) A Б) B В) C Г) D

1.2 Вкажіть рівняння прямих, паралельних до прямої $y = 3x + 7$

- A) $\frac{x}{3} + \frac{y}{9} = 1$ Б) $y = 3x - 27$ В) $\frac{y}{9} - \frac{x}{3} = 1$
Г) $3x + 2y - 6 = 0$ Д) $6x - 2y + 13 = 0$

1.3 Яке рівняння представляє параболу зображену на малюнку?



- A) $y = 2(x + 2)^2$
Б) $y - 1 = (x + 2)^2$
В) $y + 1 = (x - 2)^2$
Г) $y + (x - 2)^2 = 1$

1.4 Знайти ексцентриситет гіперболи $24x^2 - 25y^2 = 600$

- A) $e = 1,4$ Б) $e = 2$ В) $e = 0,5$
Г) $e = 0$ Д) правильна відповідь відсутня

1.5 Прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли їх кутові коефіцієнти...

- A) рівні Б) рівні за модулем, але протилежні за знаком
В) пропорційні Г) обернені за абсолютною величиною

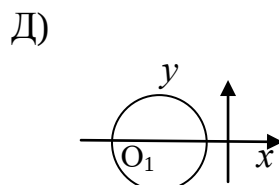
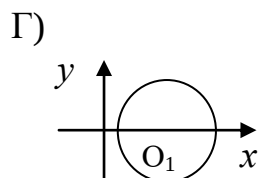
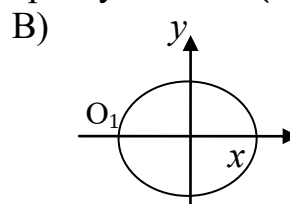
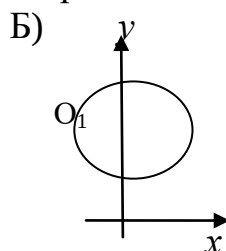
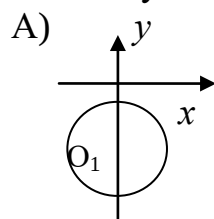
1.6 Визначить координати фокуса параболу $2y^2 - 5x = 0$

- A) $F(0; -2)$ Б) $F(5; 0)$ В) $F(0; \frac{5}{4})$ Г) $F(\frac{5}{8}; 0)$

1.7 Рівняння виду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$ є...

- A) канонічним рівнянням кола Б) канонічним рівнянням еліпса
В) канонічним рівнянням гіперболи Г) канонічним рівнянням параболу

1.8 На якому з малюнків зображено коло з центром у точці $O_1(0; b)$



1.9 Складіть найпростіше рівняння параболи, якщо відомо, що фокус знаходиться в точці перетину прямої $4x - 3y - 4 = 0$ з віссю Ox .

А) $y^2 = 16x$ Б) $x^2 = 16y$ В) $y^2 = 4x$ Г) $x^2 = 4y$ Д) $y^2 = x$

1.10 Оберіть рівняння прямих, що проходять через т. $A(4; 3)$ та відтинають від координатного кута трикутник площею 3 кв. од.

А) $-\frac{2x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ Б) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ В) $-\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 1$ Г) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть квадрат радіуса кола $x^2 + y^2 + 16y - 9 = 0$. Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Напишіть рівняння параболи симетричної відносно осі Ox , що має вершину в початку координат та проходить через точку $A(-2; 4)$

2.3 Встановіть відповідність між рівняннями прямих та точками через які вони проходять.

А	$x - 7y - 25 = 0$
Б	$3x - 2y - 12 = 0$
В	$4x + 7y - 2 = 0$
Г	$6x - 4y + 1 = 0$

1)	$(2; -3)$
2)	$(-3; 2)$
3)	$(-\frac{3}{2}; -2)$
4)	$(-2; -\frac{3}{2})$
5)	$(4; -3)$

Високий рівень

Частина III

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

3.1 Заповніть прогалину у наступному означенні:

Гіперболою називається, абсолютна величина різниці відстаней від кожної з яких до

3.2 Покажіть, що коло є окремим випадком еліпса, у якого півосі рівні між собою, а відповідно ексцентриситет дорівнює нулю.

III Вступ до математичного аналізу

Варіант 1

Початковий і середній рівень

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Знайдіть область визначення і область значень функції $y = \sin 2x$

А) $D(y) = R, E(y) = R$

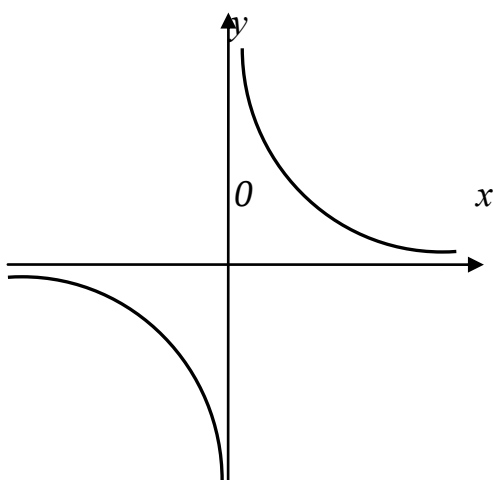
Б) $D(y) = [-1; 1], E(y) = R$

В) $D(y) = R, E(y) = [-1; 1]$

Г) $D(y) = R, E(y) = (-1; 1)$

Д) $D(y) = R, E(y) = (-\infty; 0)$

1.2 Графік якої функції зображено на малюнку?



А) прямої пропорційності

Б) лінійної функції

В) степеневі функції

Г) квадратичної функції

Д) оберненої пропорційності

Е) показникової функції

1.3 Визначить парність функції $f(x) = x^2 + 3 \cos x - \frac{12}{x^2}$.

А) парна

Б) не парна

В) ні парна ні непарна

1.4 Оберіть відомі вам способи задання функції.

А) аналітичний

Б) графічний

В) алгебраїчний

Г) табличний

Д) словесний

1.5 Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

А) -1

Б) 0

В) $0,5$

Г) 1

Д) 2

1.6 Функція $y = x^2$ в околі нескінченості буде...

А) нескінченно малою величиною

Б) нескінченно великою величиною

В) не тим не іншим

1.7 Чому дорівнює значення границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$?

А) 0

Б) 1

В) e

Г) ∞

1.8 Яку з перерахованих властивостей має функція $y = 2 - x^2$

А) вона не є обмеженою

Б) вона обмежена зверху

В) вона обмежена знизу

Г) жодної з властивостей не має

1.9 Яка з наведених функцій не є зростаючою?

А) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$

Б) $y = \pi^x$

В) $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$

Г) $y = e^x$

1.10 За теоремою границя частки $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)}$ дорівнює...

$\frac{(\lim_{x \rightarrow x_0} u(x))v(x_0) - u(x_0)(\lim_{x \rightarrow x_0} v(x))}{v^2(x_0)}$

А) $\frac{\lim_{x \rightarrow 0} u(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} v(x)}$

Б) $\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} v(x)}$

В) $\frac{A}{B}$, где $A = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$ и $B = \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$

- скінченні границі та $B \neq 0$

Г) $\frac{u(x_0)}{v(x_0)}$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Встановіть відповідність між функціями та точками, в яких дані функції мають розрив.

А	$y = \frac{1}{1-x}$
Б	$y = \frac{x}{x-2}$
В	$y = \frac{2x}{x+1}$
Г	$y = \operatorname{tg} x$

1)	$\frac{\pi}{2} + k\pi$
2)	$\pi + k\pi$
3)	2
4)	-1
5)	1

2.2 Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) - \ln(1+2x)}{x}$ Відповідь запишіть цілим числом.

2.3 Запишіть перші п'ять членів числової послідовності $\{a_n\}$, якщо

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Функцією називають..., якщо кожному значенню...

3.2 Обчисліть: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (n+1)^4}{(2n+1)^4 + (n+1)^4}$

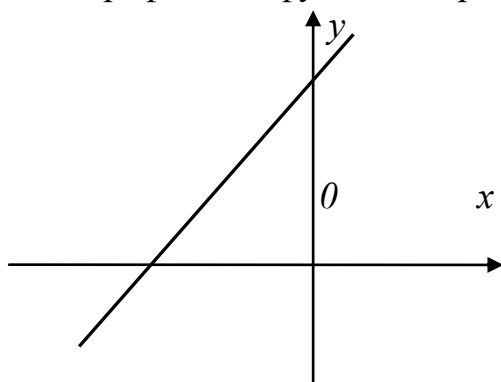
Варіант 2
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Знайдіть область визначення і область значень функції $y = \ln x$

- А) $D(y) = R, E(y) = R$
- Б) $D(y) = [0; +\infty), E(y) = (-\infty; +\infty)$
- В) $D(y) = (0; +\infty), E(y) = (-\infty; +\infty)$
- Г) $D(y) = R, E(y) = [-1; 1]$
- Д) $D(y) = (-\infty; 0], E(y) = R$

1.2 Графік якої функції зображено на малюнку?



- А) прямої пропорційності
- Б) лінійної функції
- Г) квадратичної функції
- В) степеневі функції
- Д) оберненої пропорційності
- Е) показникової функції

1.3 Визначить парність функції $f(x) = 3x^5 + 7 \sin x - \arcsin x$.

- А) парна
- Б) не парна
- В) ні парна ні непарна

1.4 Для функції $y = x^3$ знайдіть обернену

- А) $y = -x^3$
- Б) $y = \frac{1}{x^3}$
- В) $y = x^{-3}$
- Г) $y = 3x^2$
- Д) $y = \sqrt[3]{x}$

1.5 Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$

- А) -1
- Б) 0
- В) $0,5$
- Г) 1
- Д) 2

1.6 Функція $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ в околі нуля буде...

- А) нескінченно малою величиною
- Б) нескінченно великою величиною
- В) не тим не іншим

1.7 Чому дорівнює значення границі $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\arcsin(x+1)}$?

- А) 0
- Б) 1
- В) $\pi/4$
- Г) π
- Д) ∞

1.8 В якій точці функція $y = \frac{3x}{4-x}$ має розрив?

- А) 0 Б) 1 В) 4 Г) дана функція не має точок розриву

1.9 Серед поданих нижче функцій оберіть парну.

- А) $y = x^5 - x$ Б) $y = \frac{1}{x^5}$ В) $y = \operatorname{tg} 5x$ Г) $y = \frac{1}{x^2} + 2$ Д) $y = \frac{1 - \cos 2x}{x^7}$

1.10 Границя послідовності розглядається при умові...

- А) $0 < |x - x_0| < \delta$ Б) $n \in N, n > n_0$ В) $n \in N, n < n_0$
 Г) $|x| > M$ Д) $n \in N, n \rightarrow 0$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Обчисліть односторонні границі для функції $y = \frac{1}{|x|}$ у заданій точці $x_0 = 0$

2.2 Встановіть відповідність між функціями та проміжками зростання.

А	$y = 6^x$
Б	$y = \log_8 x$
В	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
Г	$y = \sqrt{x}$

1)	$(0; +\infty)$
2)	$(2; +\infty)$
3)	$(-\infty; +\infty)$
4)	$(-\infty; 0]$
5)	$[0; +\infty)$

2.3 Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{2x}$ Відповідь запишіть цілим числом.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалину у наступному означенні:

Якщо..., то цю функцію називають нескінченно малою в точці x_0 .

3.2 Знайдіть односторонні границі функції $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0 \end{cases}$ у точці

$x = 0$. Визначити чи існує у функції границя при $x \rightarrow 0$. (розпишіть все поетапно)

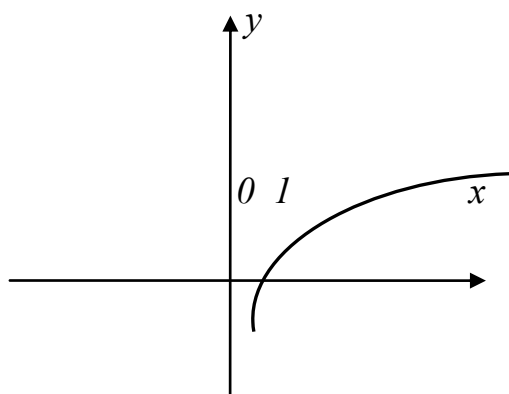
Варіант 3
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Знайдіть область визначення і область значень функції $y = \cos 2x$

- А) $D(y) = R, E(y) = R$ Б) $D(y) = [-1; 1], E(y) = R$
В) $D(y) = R, E(y) = [-1; 1]$ Г) $D(y) = R, E(y) = (-1; 1)$
Д) $D(y) = R, E(y) = (-\infty; 0)$

1.2 Графік якої функції зображено на малюнку?



- А) прямої пропорційності
Б) лінійної функції
В) степеневі функції
Г) квадратичної функції
Д) логарифмічної функції
Е) показникової функції

1.3 Визначить парність функції $f(x) = x^3 \sin 3x$.

- А) парна Б) не парна В) ні парна ні не парна

1.4 На якому проміжку функція $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ спадає?

- А) $(+\infty; -\infty)$ Б) $[0; 2]$ В) $(+\infty; 2]$ Г) $(-\infty; 0]$ Д) $(0; 2)$

1.5 Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}$

- А) -1 Б) 0 В) $0,5$ Г) 1 Д) 2

1.6 Функція $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ в околі нескінченості буде...

- А) нескінченно малою величиною Б) нескінченно великою величиною
В) не тим не іншим

1.7 Чому дорівнює значення границі $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$?

- А) 0 Б) 1 В) e Г) ∞

1.8 Серед поданих нижче функцій оберіть парні.

- А) $y = \frac{1}{x}$ Б) $y = \sqrt{x}$ В) $y = x^2$
Г) $y = x^3 + 2x$ Д) $y = \sin 2x$ Е) $y = \cos x$

1.9 Яка з функцій є нескінченно великою при $x \rightarrow 0$?

- А) $y = \sin x$ Б) $y = \frac{1}{|x|}$ В) $y = \operatorname{tg} x$
 Г) $y = \arcsin x$ Д) $y = x$

1.10 Значення границі $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$ дорівнює...

- А) 1 Б) ∞ В) e Г) e^6 Д) $e^{2/3}$

Достатній рівень
Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 3}$ Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між функціями та областями визначення.

А	$y = \log_9(7 - x)$	1)	$(-\infty; 3]$
Б	$y = \sqrt[8]{9 - 3x}$	2)	$(-\infty; -7) \cup (-7; +\infty)$
В	$y = \lg(3 - x)$	3)	$(-\infty; -7]$
Г	$y = \frac{5}{\sqrt[3]{x + 7}}$	4)	$(-\infty; 3)$
		5)	$(-\infty; 7)$

2.3 Послідовність чисел задана так: $a_1 = 1, a_n = a_{n-1}n, n \in \mathbb{N}$. Знайдіть перші п'ять членів послідовності.

Високий рівень
Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Функцію $y = f(x)$, $x \in D$ називають парною, якщо... і для всіх x ...

3.2 Доведіть, що границя функції $f(x) = c$, $c = \text{const}$ у будь-якій точці x_0 дорівнює c .

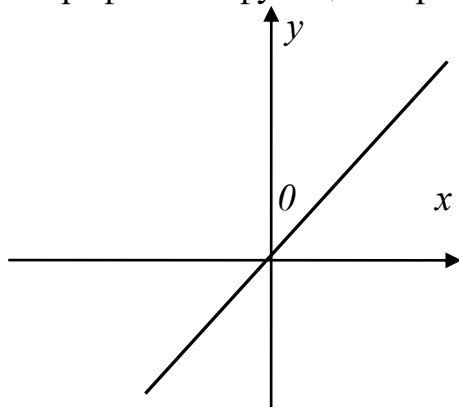
Варіант 4
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Знайдіть область визначення і область значень функції $y = \frac{1}{\sqrt{(x-3)x+2}}$

- А) $D(y) = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$
- Б) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$, $E(y) = (0; +\infty)$
- В) $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$
- Г) $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{R}$
- Д) $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [-1; 1]$

1.2 Графік якої функції зображено на малюнку?



- А) прямої пропорційності
- Б) лінійної функції
- В) степеневі функції
- Г) квадратичної функції
- Д) оберненої пропорційності
- Е) показникової функції

1.3 Визначить парність функції $f(x) = x^2 \cos x$.

- А) парна
- Б) не парна
- В) ні парна ні непарна

1.4 Яку з перерахованих властивостей має функція $y = |x|$

- А) вона не є обмеженою
- Б) вона обмежена зверху
- В) вона обмежена знизу
- Г) жодної з властивостей не має

1.5 Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$

- А) -1
- Б) 0
- В) 0,5
- Г) 1
- Д) 2

1.6 Функція $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ в околі нуля буде...

- А) нескінченно малою величиною
- Б) нескінченно великою величиною
- В) не тим не іншим

1.7 Чому дорівнює значення границі $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 6}{x^2 + x + 2}$?
 А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) ∞

1.8 Для функції $y = x^5$ знайдіть обернену
 А) $y = -x^5$ Б) $y = \frac{1}{x^5}$ В) $y = x^{-5}$
 Г) $y = 5x^4$ Д) $y = \sqrt[5]{x}$

1.9 Обчисліть: $\lim_{x \rightarrow 1} (2\sqrt{x} + 3x^2 + \ln x)$
 А) -2 Б) 0 В) 5 Г) 7 Д) ∞

1.10 Значення границі $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ дорівнює...
 А) -1 Б) 0 В) 0,5 Г) 1 Д) ∞

Достатній рівень
Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Обчисліть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між формулою та назвою функцій.

А	$y = a^x$	1)	степенева функція
Б	$y = ax^2 + bx + c$	2)	лінійна функція
В	$y = x^n$	3)	показникова функція
Г	$y = kx + b$	4)	квадратична функція
		5)	тригонометрична функція

2.3 Обчисліть односторонні границі для функції $y = \operatorname{tg} x$ у заданій точці
 $x_0 = \frac{\pi}{2}$

Високий рівень

Частина III

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Графіком функції називають..., абсциси яких дорівнюють значенню аргументу,...

3.2 Обчисліть: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$ (розпишіть все поетапно)

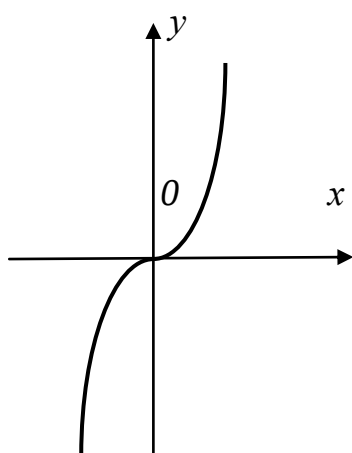
Варіант 5
Початковий і середній рівень
Частина I

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

1.1 Знайдіть область визначення і область значень функції $y = 2x + 3$

- А) $D(y) = (3; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; 2)$
- Б) $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [-1; 1]$
- В) $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$
- Г) $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{R}$
- Д) $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$

1.2 Графік якої функції зображено на малюнку?



- А) прямої пропорційності
- Б) лінійної функції
- В) степеневі функції
- Г) квадратичної функції
- Д) оберненої пропорційності
- Е) логарифмічної функції

1.3 Визначить парність функції $f(x) = \frac{\cos x}{|x|+1}$.

- А) парна
- Б) не парна
- В) ні парна ні не парна

1.4 Який вигляд має функція обернена до функції $y = \log_3 x$?

- А) $y = \log_x 3$
- Б) $y = \frac{1}{x^3}$
- В) $y = x^{-3}$
- Г) $y = 3^x$
- Д) $y = \sqrt[3]{x}$

1.5 Знайдіть границю послідовності $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$

- А) -1
- Б) 0
- В) $0,5$
- Г) 1
- Д) 2

1.6 Функція $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ в околі нескінченості буде...

- А) нескінченно малою величиною
- Б) нескінченно великою величиною
- В) не тим не іншим

1.7 Чому дорівнює значення границі $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + 2n - 3}{n^2 - 4n - 1}$?

- А) $-0,5$
- Б) 0
- В) 1
- Г) 3
- Д) ∞

1.8 На якому проміжку функція $f(x) = x^2$ зростає?

- А) $(0; +\infty)$ Б) $(+\infty; -\infty)$ В) $(-\infty; 0)$
 Г) $[0; +\infty)$ Д) дана функція є спадною

1.9 Серед поданих нижче функцій оберіть непарну.

- А) $y = \sin|x|$ Б) $y = \frac{1}{x^2} + 2$ В) $y = \frac{1 - \cos 2x}{x^7}$
 Г) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ Д) $y = |x^3|$

1.10 Значення границі $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$ дорівнює...

- А) $-\infty$ Б) 0 В) $0,5$ Г) 1 Д) $+\infty$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$ Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між функціями та проміжками спадання.

А	$y = -3x + 2$
Б	$y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$
В	$y = x^2 - 3x + 2$
Г	$y = \frac{1}{x^3}$

1)	$(0; +\infty);$
2)	$[0; +\infty)$
3)	$(-\infty; +\infty)$
4)	$(-\infty; 1,5]$
5)	$(-\infty; -1]$

2.3 Запишіть формулу загального члена послідовності $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Число A називається границею справа функції $y = f(x)$ у точці x_0 , якщо ..., для всіх x інтервалу $(x_0; x_0 + \delta)$ виконується нерівність...

3.2 Доведіть, що функція $y = \cos \frac{1}{x}$ в точці $x = 0$ не має границі (розпишіть все поетапно).

IV Диференціальне числення функції однієї змінної

Варіант 1

Початковий і середній рівень

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Якщо функція в точці a має скінчену похідну, то рівняння дотичної буде наступним ...

А) $y = f(a) - f'(a)(x - a)$

Б) $y = f(a) + f'(a)(x + a)$

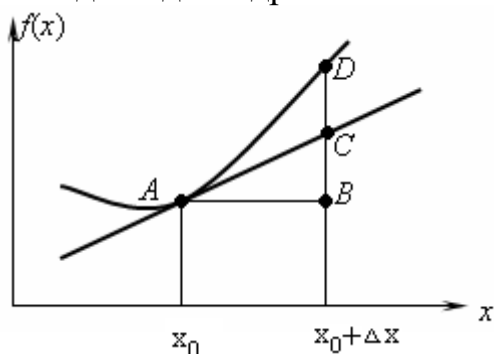
В) $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

Г) $y = f(a) + \frac{1}{f'(a)}(x - a)$

Д) $y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$

Е) $y = f'(a) + f(a)(x - a)$

1.2 Диференціалу функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ на основі геометричного змісту відповідає відрізок...



А) AC

Б) BC

В) BD

Г) CD

Д) AB

1.3 Чому дорівнює похідна функції $y = \cos x + \sin x - \sqrt[3]{x^2}$?

А) $\sin x - \cos x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Б) $\cos x + \sin x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

В) $\cos x - \sin x - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Г) $\sin x - \cos x - 3\sqrt{x^2}$

1.4 Непереривність функції ... умова для її диференційованості.

А) необхідна

Б) достатня

В) необхідна і достатня

1.5 Знайдіть значення x та y , при яких перетворюється в нуль похідна функції $y = 2x^3 - 9x^2$.

А) $(0; 0); (3; -27)$

Б) $(0; 0); (0; 4,5)$

В) $(1; 3); (2; -2)$

Г) $(0; 2); (-3; 0)$

Д) $(3; 4); (0; -1)$

1.6 Невертикальних асимптот графіка функції може бути...

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) будь-яка скінченна кількість

Д) нескінченно багато

1.7 Коли швидкість точки, що рухається за законом $s = t^2 - 4t + 5$, дорівнює нулю?

- А) $t = 0$ с Б) $t = 1$ с В) $t = 2$ с Г) $t = 3$ с Д) $t = 4$ с Е) $t = 5$ с

1.8 Який мінімум має функція $y = x^2 + 2x - 1$?

- А) $x = -2$ Б) $x = -1$ В) $x = 0$ Г) $x = 1$ Д) $x = 2$

1.9 Похідна функції $y = x^{\arcsin x}$ дорівнює...

- А) $\arcsin x \cdot x^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}$ Б) $x^{\arcsin x} \cdot \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 В) $\arcsin x \cdot x^{\arcsin x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Г) $x^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x} \right)$
 Д) $x^{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} \cdot \ln x$

1.10 Яку кількість екстремумів має функції $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$?

- А) *безліч* Б) 4 В) 3 Г) 2 Д) 1 Е) *жодного не має*

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть другу похідну функції $y = 2 \arctg x$ в точці $x_0 = 1$.

2.2 Встановіть відповідність між функціями та її похідними.

А	$y = a^x$
Б	$y = \log_a x$
В	$y = \operatorname{tg} x$
Г	$y = \arcsin x$
Д	$y = \operatorname{arcctg} x$

1)	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
2)	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3)	$y' = a^x \ln a$
4)	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$
5)	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

2.3 Знайдіть $d^3(x^4)$. У відповіді вкажіть числовий множник.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Границю відношення ..., що приріст аргумента прямує..., називають похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 .

3.2 Визначить проміжки зростання і спадання функції $y = x^3 - 3x^2 + 5$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 2
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x \cos \frac{1}{5x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

1.1 Похідна функції

в точці $x = 0 \dots$

А) не існує

Б) дорівнює 0

В) дорівнює 1

Г) дорівнює 2

Д) дорівнює 3

1.2 Серед перерахованих формул оберіть не правильні.

А) $(\sin x)' = \cos x$

Б) $(\cos x)' = -\sin x$

В) $(\operatorname{tg} x)' = -\frac{1}{\cos^2 x}$

Г) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Д) $(a^x)' = a^x \ln a$

Е) $(e^x)' = x e^{x-1}$

1.3 Чому дорівнює похідна функції $y = x \ln x$?

А) $\frac{1}{x}$

Б) $\ln x + \frac{1}{x}$

В) $\ln x + 1$

Г) $\ln x + x$

1.4 До кривої, рівняння якої $y = -2x^2 + 8x - 9$, проведено дотичну, що паралельна осі абсцис. Визначіть координати точки дотику.

А) (2; -1)

Б) (-2; 1)

В) (1; 3)

Г) (0; 2)

Д) (3; 4)

1.5 Знайдіть значення x та y , при яких перетворюється в нуль похідна функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 18$.

А) (2; -1); (0; 0);

Б) (-2; 2); (1; -25)

В) (1; 3); (2; -1)

Г) (0; 2); (1; -25)

Д) (3; 4); (-2; 2)

1.6 Висота s в метрах, що досягається тілом в t с, кинутим вертикально у гору з початковою швидкістю v_0 м/с, задається формулою $s = v_0 t - 4,9t^2$. Якщо $v_0 = 100$ м/с, то якою буде швидкість руху тіла наприкінці другої секунди?

А) 12 м/с

Б) 26,3 м/с

В) 61 м/с

Г) 80,4 м/с

Д) 93,5 м/с

1.7 Знайдіть y'' , якщо $y = x^2 + 3x - 5$.

А) 0

Б) 2

В) $2x + 3$

Г) -5

1.8 Дослідити на максимум функцію $y = 3 + 8x - x^2$

А) $x = 0$

Б) $x = 1$

В) $x = 2$

Г) $x = 3$

Д) $x = 4$

1.9 Друга похідна функції $y = e^x + x^2 - 1$ дорівнює...

А) e^x

Б) $e^x + 1$

В) $e^x + 2$

Г) $e^x + 2x$

Д) $e^x + 2x - 1$

1.10 Періодична функція $y = f(x)$ визначена для всіх дійсних чисел. Її період дорівнює 3. Якщо число її нулів на відрізку $[1;7]$ дорівнює 3, то чому дорівнює добуток цих нулів?

- А) 0 Б) 28 В) 48 Г) 60
 Д) функція не може мати на відрізку $[1;7]$ 3 нуля

Достатній рівень
Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2 + 2x - 4$ в точці $x_0 = -1$.

2.2 Встановіть відповідність між функцією та її похідною.

А	Похідна періодичної диференційованої функції	1)	функція періодична
Б	Похідна парної диференційованої функції	2)	функція не періодична
В	Похідна непарної диференційованої функції	3)	функція парна
		4)	функція непарна

2.3 Знайдіть диференціал функції $y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x^2$ в точці $x_0 = \sqrt{\pi}$, якщо приріст аргумента $\Delta x = -2$. Відповідь запишіть цілим числом.

Високий рівень
Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Якщо ..., то $f_1'(x)$ називають другою похідною функції $f(x)$.

3.2 Дослідити на максимум і мінімум функцію $y = x^3$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 3
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Похідна функції $y = x^2 \cdot e^x$ дорівнює...

- А) $2x \cdot e^x + x^3 \cdot e^{x-1}$ Б) $2x \cdot e^x$ В) $2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x$
Г) $2x + e^x$ Д) $2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

1.2 Якщо $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, то диференціал це...

- А) A Б) $A \cdot \Delta x$ В) $\alpha(\Delta x)$ Г) $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$

1.3 Чому дорівнює похідна функції $y = \frac{\sin x}{x}$?

- А) $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$ Б) $\frac{\cos x}{2x}$ В) $\frac{x \cos x + \sin x}{x^2}$ Г) $\cos x - 1$

1.4 Знайдіть рівняння дотичної до кривої в точці, абсциса якої дорівнює -1

- А) $-4x + y + 7 = 0$ Б) $4x + y + 7 = 0$ В) $x + 2y + 5 = 0$
Г) $-x + 4y + 7 = 0$ Д) $2x - y + 5 = 0$

1.5 Знайдіть значення x та y , при яких перетворюється в нуль похідна функції $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4}$.

- А) $(2; -1); (3; 4)$
Б) $(-2; 1); (1; 3)$
В) $(0; 2); (1; -25)$
Г) $(-2; 0); (-3\frac{3}{4}; \frac{1}{4}); (2; 0)$
Д) $(-2; -3\frac{3}{4}); (0; \frac{1}{4}); (2; -3\frac{3}{4})$

1.6 Приблизне значення функції $y = \sqrt{x^2 + 5}$, що обчислюється за допомогою диференціала в точці $x = 1,97$, дорівнює...

- А) 2,97 Б) 2,98 В) 2,99 Г) 3,00 Д) 3,01 Е) 3,02

1.7 Знайдіть y''' , якщо $y = 3 - x^3$.

- А) $-3x^2$ Б) $-6x$ В) -6 Г) 0

1.8 Шлях s в метрах, пройдений точкою за t с, визначається рівнянням $s = 2t^3 - 3$. Знайдіть швидкість руху через 2 с після початку.

- А) 12 м/с Б) 16 м/с В) 20 м/с Г) 24 м/с Д) 27,5 м/с

1.9 Функція $f(x) = x^2 e^{1/x}$ в точці $x = 0$ має розрив, тому що ...

А) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$

Б) $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0)$

В) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 0$, а $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$

Г) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) > \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$

Д) $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$

1.10 Дослідити на максимум функцію $y = 4 - 3x - 5x^2$

А) $x = -\frac{1}{10}$

Б) $x = -\frac{2}{10}$

В) $x = -\frac{3}{10}$

Г) $x = 1$

Д) $x = 2$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Визначить кількість цілих невід'ємних чисел, що потрапляють в такі проміжки області визначення функції, в яких графік функції опуклий. Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Для функції $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ встановіть відповідність між односторонніми похідними та їх значеннями.

А	$f'(-0)$
Б	$f'(+0)$
В	$f'(\pi/3 - 0)$
Г	$f'(-\pi/3 + 0)$

1)	-1
2)	$-\frac{1}{2}$
3)	0
4)	$\frac{1}{2}$
5)	1

2.3 Визначить скільки точок розриву має функція
Відповідь запишіть цілим числом.

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-3)^2}{x^4(x-3)(x-1)^3}$$

Високий рівень

Частина III

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Функцію, ...називають диференційованою на інтервалі $(a; b)$. Операцію відшукування похідної називають

3.2 Знайдіть точки перегину графіка функції $y = x^4$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 4
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Похідна функції $y = \sin 8x$ дорівнює...

А) $8\sin 8x$

Б) $8\cos 8x$

В) $\cos 8x$

Г) $-8\cos 8x$

Д) $\frac{1}{8}\cos 8x$

Е) $-\frac{1}{8}\cos 8x$

1.2 Диференціал $y = x^2 - 1$ функції дорівнює...

А) $(2x - 1)dx$

Б) $x dx$

В) $2x dx$

Г) dx

Д) $(x^2 - 1)dx$

Е) $x^2 dx$

1.3 Чому дорівнює похідна функції $y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$?

А) $\arccos \sqrt{1 - x^2}$

Б) $\arccos \sqrt{1 - 2x}$

В) $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Г) $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$

1.4 Знайдіть рівняння дотичної до гіперболи $y = \frac{1}{x}$ в точці, абсциса якої дорівнює 1

А) $x + y - 2 = 0$

Б) $x + y + 2 = 0$

В) $4x + y + 7 = 0$

Г) $4x + y - 7 = 0$

Д) $x - y - 2 = 0$

1.5 Знайдіть значення x та y , при яких перетворюється в нуль похідна функції $y = x^4 - 2x^3 + 4$.

А) $(2; -1); (0; 0);$

Б) $(-2; 1); (3; 4)$

В) $(1; 3); (-2; 2)$

Г) $(0; 2) (1; \frac{1}{4})$

Д) $(0; 4); (\frac{3}{2}; \frac{37}{16})$

1.6 Висота s в метрах, що досягається тілом в t с, кинутим вертикально у гору з початковою швидкістю v_0 м/с, задається формулою $s = v_0 t - 4,9t^2$. Якщо $v_0 = 100$ м/с, то якою буде швидкість руху тіла наприкінці 15-ї секунди?

А) 12 м/с

Б) 26,3 м/с

В) -61 м/с

Г) -47 м/с

Д) -93,5 м/с

1.7 Чому дорівнює найбільше значення функції $y = \log_{\sqrt{5}}(-x^2 - 10x)$?

А) 3

Б) 4

В) 5

Г) 6

Д) 7

1.8 Функція $y = 1/x$ в точці $x=0$...

А) неперервна

Б) має скінченний стрибок

В) має усувний розрив

Г) має розрив другого роду

1.9 Якщо приріст функції замінити на її диференціал, то $\sin 29^\circ$ буде приблизно дорівнювати...

- А) $\frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$ Б) $1/2 - \sqrt{3}/2$ В) $1/2 + \sqrt{3}/2$ Г) $1/2$ Д) $\frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$

1.10 Дослідити на мінімум функцію $y = 2x^2 - 5x + 7$

- А) $x = -1$ Б) $x = 0$ В) $x = 1$ Г) $x = \frac{5}{4}$ Д) $x = \frac{7}{4}$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною, проведеною до кривої $y = x^3$ в точці $(3; 27)$. Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між функцією y та її n -ю похідною $y^{(n)}$:

А	$y = a^x$	1)	$y^{(n)} = \cos(x + \pi n/2)$
Б	$y = \sin x$	2)	$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{x^n}$
В	$y = \cos x$	3)	$y^{(n)} = a^x \ln^n a$
Г	$y = x^a$	4)	$y^{(n)} = \sin(x + \pi n/2)$
Д	$y = \ln x$		

2.3 Підрахуйте скільки вертикальних асимптот має графік функції

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1}. \text{ Відповідь запишіть цілим числом.}$$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалину у наступному означенні:

Точкою перегину, плоскої кривої називається....

3.2 Знайдіть координати вершини параболи $y = -x^2 + 4x$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 5
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Похідна функції $y = \frac{\ln x}{x}$ дорівнює...

А) $\frac{1 + \ln x}{x^2}$ Б) $\frac{1 + \ln x}{x}$ В) $\frac{1}{x}$ Г) $\frac{1}{x^2}$ Д) $\frac{1 - \ln x}{x^2}$

1.2 Диференціал $d(uv^{-2})$ дорівнює...

А) $\frac{du}{v^2} - \frac{2uv}{v^3} dv$ Б) $\frac{vdu + 2uv}{v^3} dv$
 В) $du \cdot (-2v^{-3}) dv$ Г) $(v^{-2} - 2uv^{-3}) dx$

1.3 Чому дорівнює похідна функції $y = \frac{x^2 + x - 3}{2x}$?

А) $\frac{2x+1}{2}$ Б) $\frac{x^2+2x}{2}$ В) $\frac{x^2+2x}{4x^2}$ Г) $\frac{x^2+3}{2x^2}$

1.4 В якій точці дотична до параболи $y = x^2$ паралельна прямій $4x - y + 1 = 0$?

А) (2; 4) Б) (-2; 4) В) (2; -4) Г) (3; 4) Д) (-3; 4)

1.5 Визначить суму всіх додатних чисел, на яких функції $y = x$ і $y = (2x^2 - 8x + 9 - |x - 2|)^{\log_{(2x^2 - 8x + 9 - |x - 2|)} x}$ не співпадають.

А) 2 Б) 4 В) 6 Г) 8 Д) ∞

1.6 Який вигляд має другий диференціал функції $f(x) = \sqrt{x-1}$?

А) $-\frac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}}$ Б) $-\frac{dx}{4\sqrt{(x-1)^3}}$ В) $-\frac{(dx)^2}{4\sqrt{(x-1)^3}}$ Г) $\frac{(dx)^2}{2\sqrt{x-1}}$

1.7 Знайдіть y'' , якщо $y = e^{3x-2}$.

А) $9e$ Б) $3e^3$ В) $3e^{3x-2}$ Г) $9e^{3x-2}$

1.8 Шлях s в метрах, пройдений точкою за t с, визначається рівнянням $s = 2t^3 - 3$. Знайдіть швидкість руху через 1 с після початку.

А) 2 м/с Б) 6 м/с В) 13 м/с
 Г) 18,4 м/с Д) 23,5 м/с

1.9 Диференціал функції $f(x) = \frac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^4}$ має вигляд...

А) $\frac{6(x+1)(x+2)^2(x+3) - 4(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^5} dx$

Б) $\frac{(x+1)^2(x+2)^3}{(x+3)^4} \left(\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3} \right) dx$

В) $\frac{6(x+1)(x+2)^2}{4(x+3)^3} dx$

Г) $\frac{2(x+1)(x+2)^3 + 3(x+1)^2(x+2)^2}{(x+3)^8} dx$

1.10 Дослідити на мінімум функцію $y = 6 + 12x - x^3$

А) $x = -2$

Б) $x = -1$

В) $x = 0$

Г) $x = 1$

Д) $x = 2$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 На кривій $y = 3x - x^2$ знайдіть абсцису точки, дотична до якої паралельна прямій $y = x + 2$... Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Визначить, при якому значенні a функція $y = \frac{2^{3x^2 - ax + 2}}{4^{3x^2 - 2ax}}$ має максимум в точці з абсцисою 5. Відповідь запишіть цілим числом.

2.3 Встановіть відповідність між функціями, що задані параметрично, та її похідними.

А	$\begin{cases} x = \ln \operatorname{tg} t \\ y = 1/\sin t \end{cases}$
Б	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
В	$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$

1)	$y' = t - \sin t$
2)	$y' = -\cos^2 t / \sin t$
3)	$y' = -\operatorname{tg} t$
4)	$y' = t - \cos t$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Гладка проста крива $y = f(x)$ називається опуклою (угнутою) в деякому інтервалі, якщо Точка, в якій опуклість кривої ..., називається точкою перегину.

3.2 Знайдіть точку перегину графіка функції $y = \frac{1}{12}(x^3 - 6x^2)$ (розпишіть все поетапно).

V Диференціальне числення функції багатьох змінних

Варіант 1

Початковий і середній рівень

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

- 1.1 Знайдіть повний диференціал dz функції $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$.
- А) $dz = \frac{2x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy$ Б) $dz = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy$
- В) $dz = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} dy$ Г) $dz = -\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$
- Д) правильна відповідь відсутня

- 1.2 Знайдіть частинну похідну по y першого порядку $\frac{\partial f}{\partial y}$, якщо $f = (xy^3)^z$.
- А) $3z \cdot x^z y^{3z-1}$ Б) $z \cdot x^{z-1} y^{3z}$ В) $(xy^3)^z \cdot \ln|x|$ Г) $(xy^3)^z \cdot \ln|xy^3|$

- 1.3 Яка з рівностей є хибною?

А) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ Б) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$ В) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)$

Г) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)$ Д) $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

- 1.4 Чому дорівнює границя функції $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (x^2 + 3y^2)$?

А) 18 Б) 13 В) 9 Г) 5 Д) функція границі не має

- 1.5 Знайдіть область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

А) $(-\infty; +\infty)$ Б) $[-1; +\infty)$ В) $(-\infty; 0)$ Г) $[-1; 1]$

- 1.6 Яка з функцій представляє собою функцію Лангранжа для поверхні $z = xy + 5$ при умові $y = 2x + 6$?

А) $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x + 6)$ Б) $L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(2x - 6 - y)$

В) $L(x, y, \lambda) = xy + 5 + \lambda(2x + 6)$ Г) $L(x, y, \lambda) = xy + 5 + \lambda(y - 6 - 2x)$

Д) правильна відповідь відсутня

1.7 Знайдіть значення катетів x і y прямокутного трикутника, при яких гіпотенуза має найменше значення при заданій площі S .

- А) $x = \sqrt{S}, y = \sqrt{2S}$ Б) $x = y = \sqrt{2S}$ В) $x = \sqrt[3]{S}, y = \sqrt[3]{4S^2}$
 Г) $x = \frac{\sqrt{S}}{2}, y = 4\sqrt{S}$ Д) $x = \sqrt{S}, y = 2\sqrt{S}$

1.8 Вкажіть функцію $z = f(x, y)$, повний диференціал якої має вигляд $dz = 2x \sin 3y dx + 3x^2 \cos 3y dy$.

- А) $z = 3x^2 \cos 3y$ Б) $z = x^2 \sin 3y$ В) $z = x^2 \cos 3y - 2$
 Г) $z = x^3 \sin 3y$ Д) правильна відповідь відсутня

1.9 Знайдіть всі правильні частинні похідні другого порядку для функції $z = \ln(xy)$.

- А) $z''_{xx} = -\frac{1}{xy}$ Б) $z''_{yy} = -\frac{1}{xy}$ В) $z''_{xy} = -\frac{1}{y^2}$ Г) $z''_{xy} = 0$
 Д) $z''_{xx} = -\frac{1}{x^2}$ Е) $z''_{yy} = -\frac{1}{y^2}$ Є) $z''_{xy} = -\frac{1}{x^2}$

1.10 Вкажіть точки екстремуму функції $z = x^2 + y^2 + 3$.

- А) $(0;0;3)$ - точка мінімуму Б) $(0;0;3)$ - точка максимуму
 В) $(3;0;0)$ - точка мінімуму Г) $(3;0;0)$ - точка максимуму
 Д) функція екстремумів не має

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Встановіть правильний порядок дій при дослідженні функції багатьох змінних на екстремум. Відповідь запишіть числами відділеними один від одного комою.

- 1) дослідити стаціонарні точки на наявність в них максимуму чи мінімуму
- 2) знайти всі частинні похідні першого порядку
- 3) визначити в знайдених точках екстремуму значення функції
- 4) знайти стаціонарні точки функції, розв'язуючи відповідну систему рівнянь
- 5) прирівняти до нуля всі частинні похідні першого порядку

2.2 Встановіть відповідність між функціями та їх змішаними частинними похідними другого порядку.

А	$z''_{xy} = 9x^2y^2$
Б	$z''_{xy} = 4xy$
В	$z''_{xy} = 6xy^2$
Г	$z''_{xy} = 6x^2y$

1)	x^4y^2
2)	x^3y^3
3)	x^2y^2
4)	x^3y^2
5)	x^2y^3

2.3 Обчисліть частинні похідні від функції $z = x^3y^5 + x^7 \sin y$.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалину у наступному означенні:

Функцією багатьох дійсних змінних називають закон,

3.2 Знайдіть область визначення функції $u = \arcsin(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{12} - 2)$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 2
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Оберіть правильні рівності для повного диференціала dz функції

$$z = f(x; y).$$

A) $dz = \frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy$

Б) $dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

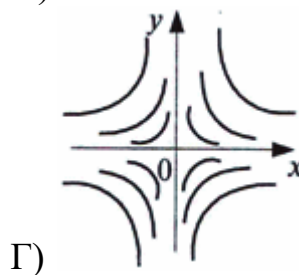
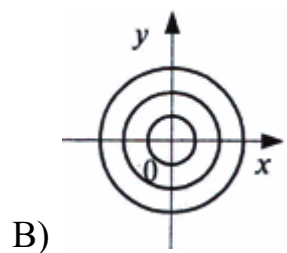
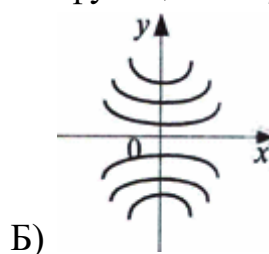
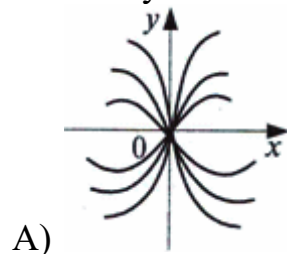
В) $dz = \frac{dz}{dx} dx + \frac{dz}{dy} dy$

Г) $dz = \frac{dz}{dx} \partial x + \frac{dz}{dy} \partial y$

Д) $dz = f'_x dx + f'_y dy$

Е) правильна відповідь відсутня

1.2 На якому з малюнків зображено лінії рівня функції $z = xy$?



1.3 Знайдіть частинну похідну по x першого порядку z'_x функції $z = e^{xy}$

A) $y \cdot e^{xy}$

Б) $-y \cdot e^{xy}$

В) $x \cdot e^{xy}$

Г) $-x \cdot e^{xy}$

Д) e^{xy}

Е) $xy \cdot e^{xy-1}$

1.4 Вкажіть правильну множину стаціонарних точок для функції

$$z = x^3 + y^3 - xy.$$

A) $\{(-1;1), (1;1)\}$

Б) $\{(0;0), (1;1)\}$

В) $\{(0;0), (-1;1), (1;1), (1;-1)\}$

Г) $\{(0;0), (-1;1), (1;1)\}$

Д) правильна відповідь відсутня

1.5 Яке значення має функція $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$ в точці екстремуму?

A) 0

Б) -1

В) $-\frac{4}{3}$

Г) $\frac{8}{3}$

Д) функція екстремумів не має

1.6 Знайдіть частину похідну по x другого порядку z''_{xx} функції $z = e^x \cdot \ln y + y^2$.

А) $-\frac{e^x}{y^2} - 2$

Б) $-\frac{e^x}{y} + 2$

В) $\frac{e^x}{y^2} - 2$

Г) $\frac{e^x}{y^2} - 2$

Д) правильна відповідь відсутня

1.7 Точкою мінімуму функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ буде...

А) $(0; 0; 0)$

Б) $(0; 3; 0)$

В) $(0; 0; -9)$

Г) $(0; 9; -3)$

Д) $(0; 3; -9)$

1.8 Серед поданих нижче оберіть частинні похідні функції $z = 2y + e^{x^2-y} + 1$.

А) $z'_x = 2xe^{x^2-y}$

Б) $z'_x = 2 + 2xe^{x-y}$

В) $z'_x = e^{x^2-y}$

Г) $z'_y = 2 + e^{x^2-y}(2x - 1)$

Д) $z'_y = 2 - e^{x^2}$

Е) $z'_y = 2 + e^{x^2-y}(-1)$

1.9 Який вигляд має частинна похідна третього порядку функції

$u = \cos(x - y)$?

А) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -\sin(x - y)$

Б) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -\cos(x - y)$

В) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \sin(x - y)$

Г) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = -\sin(x - y)$

Д) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \cos(x - y)$

1.10 Вкажіть найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, що задана

двома нерівностями $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}$.

А) 0

Б) -1

В) -6

Г) 1

Д) -8

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть значення виразу $z'_y - 2 \cdot z'_x$ в точці $(1; 1)$, якщо $z = x^{\sqrt{y}}$. Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між похідними другого порядку від функції $z = x^2 \sin y$ та їх значеннями в точці $M_0(1; \frac{\pi}{2})$.

А	$z''_{xx} = 2 \sin y$
Б	$z''_{xy} = 2x \cos y$
В	$z''_{yy} = -x^2 \sin y$

1)	0
2)	1
3)	-1
4)	2

2.3 Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 3$.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Графіком функції $y = f(x_1; x_2; \dots x_n)$... називають множину ..., де $(x_1; x_2; \dots x_n) \in E$.

3.2 Знайдіть частинні похідні другого порядку функції

$z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 3
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Оберіть правильну рівність для функції $u = \ln(e^x + e^y)$.

A) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

Б) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$

В) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$

Г) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 1$

Д) правильна відповідь відсутня

1.2 Знайдіть частинну похідну по y першого порядку z'_y функції $z = \cos \frac{x}{y}$

A) $-\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}$

Б) $\cos \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^2}$

В) $-\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^2}$

Г) $\sin \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y^2}$

Д) правильна відповідь відсутня

1.3 Чому дорівнює границя функції $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^4} \right)$?

A) 0

Б) 2

В) 13

Г) $+\infty$

Д) функція границі не має

1.4 Вкажіть яка відповідь не правильна. Частину похідну функції $z = f(x; y)$ по змінній x позначають: ...

A) $f'_x(x_0; y_0)$

Б) $\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}$

В) $\frac{\partial x(x_0; y_0)}{\partial f}$

Г) $z'_x(x_0; y_0)$

1.5 Вкажіть координати стаціонарних точок функції $z = \frac{\ln x}{y} + x$.

A) (1; -1)

Б) (1; 1)

В) (-1; 1)

Г) (0; 1)

Д) критичні точки відсутні

1.6 Знайдіть частину похідну по y другого порядку z''_{yy} функції $z = x \cdot \ln \frac{y}{x}$.

A) $\frac{x}{y^2}$

Б) $-\frac{x}{y^2}$

В) $\frac{x}{y}$

Г) $-\frac{x^2}{y^2}$

Д) правильна відповідь відсутня

1.7 Областю визначення функції буде...

A) $x^2 + y^2 < 9$

Б) $x^2 + y^2 \geq 9$

В) $\begin{cases} y < x, \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$

Г) $\begin{cases} y < x, \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$

1.8 Оберіть правильне твердження. Достатньою умовою диференційованості функції двох змінних є ...

А) існування неперервних частинних похідних

Б) існування скінченних частинних похідних

В) існування частинних похідних

Г) серед поданих відповідей не має правильної

1.9 Стационарною точкою функції $z = 1 - x^2 - y^2$ буде...

А) (1; -1)

Б) (-2; +∞)

В) (0; 0)

Г) (-∞; +∞)

1.10 Вкажіть правильну рівність для диференціала другого порядку d^2z функції $z = f(x, y)$ у випадку, коли x і y – незалежні змінні.

А) $d^2z = \frac{d^2z}{dx^2} dx^2 + 2 \frac{d^2z}{dxdy} dxdy + \frac{d^2z}{dy^2} dy^2$

Б) $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$

В) $dz^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 dy^2$

Г) $d^2z = z''_{xx} + z''_{xy} + z''_{yy}$

Д) правильна відповідь відсутня

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть екстремум функції $z = 0,75 - 2x - (y - x)^2$ при умові $y + x = 2$.

Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Визначить правильну послідовність у дослідженні диференційованої функції $z = f(x; y)$ на найбільше (найменше) значення функції в замкненій області F .

2.3 Обчисліть частинні похідні від функції $z = \sqrt{\sin(x^2 - y^2)}$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Число A називають границею функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0; y_0)$, ..., виконується рівність: $\lim_{k \rightarrow \infty} f(M_k) = \dots = A$

3.2 Знайдіть частинні похідні функції z , заданої рівнянням

$e^z + z - x^2y + 1 = 0$ (розпишіть все поетапно).

Варіант 4
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

- 1.1 Для функції $z = xy^2 \cdot \operatorname{tg} y$ вкажіть $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0}$, где $M_0(1; \frac{\pi}{4})$.
- A) π Б) $\frac{\pi^2}{4}$ В) 4 Г) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ Д) правильна відповідь відсутня

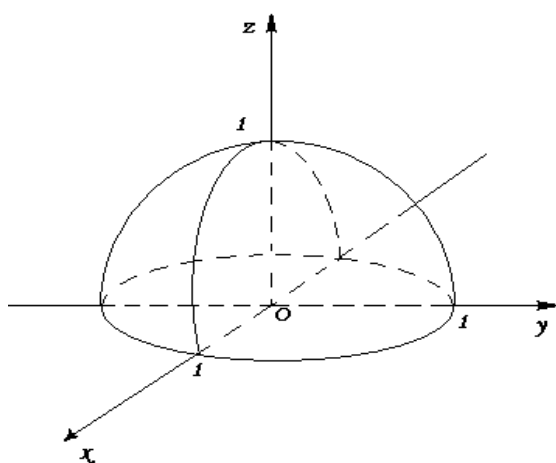
- 1.2 Знайдіть правильну комбінацію частинних похідних для функції $w = \ln(xyz)$.

- A) $w'_x = \frac{1}{xyz}, w'_y = \frac{1}{xyz}, w'_z = \frac{1}{xyz}$ Б) $w'_x = \frac{1}{yz}, w'_y = \frac{1}{xz}, w'_z = \frac{1}{xy}$
- В) $w'_x = \frac{1}{x}, w'_y = \frac{1}{y}, w'_z = \frac{1}{z}$ Г) правильна відповідь відсутня

- 1.3 Знайдіть область визначення функції $z = x^2 + y^2$.

- A) $(-\infty; +\infty)$ Б) $[-1; +\infty)$ В) $(-\infty; 0)$ Г) $[-1; 1]$

- 1.4 Яка, з поданих нижче, функція має областю визначення круг $x^2 + y^2 \leq 1$ і зображується верхньою півсферою з центом в точці $O(0;0;0)$ і радіусом $R=1$



- A) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
Б) $z = \sqrt{1 + x^2 - y^2}$
В) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$
Г) $z = x^2 + y^2$
Д) $z = \sqrt{(y - x)^2 - y^2}$
Е) $z = \sqrt{x - y^2}$

- 1.5 Яке з тверджень правильне? В точці максимуму функції градієнт...

- A) дорівнює нулю
Б) дорівнює нулю або не існує
В) досягає максимальної довжини
Г) не дорівнює нулю і паралельний осі Oz
Д) може бути довільним вектором

1.6 Знайдіть границю $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

- А) 0 Б) 6 В) 21 Г) $+\infty$ Д) функція границі не має

1.7 Серед поданих нижче частинних похідних другого порядку, оберіть правильні для функції $z = \sin(xy)$.

- А) $z''_{xx} = -2y \sin(xy)$ Б) $z''_{xx} = -x^2 \sin(xy)$ В) $z''_{yy} = -2y \sin(xy)$
 Г) $z''_{xx} = -y^2 \sin(xy)$ Д) $z''_{yy} = -2y \cos(xy)$ Е) $z''_{xx} = -2x \sin(xy)$
 Є) $z''_{yy} = -2x \sin(xy)$ Ж) $z''_{yy} = -x^2 \sin(xy)$ З) $z''_{yy} = -y^2 \sin(xy)$

1.8 Функція $z = f(x; y)$ (або $f(M)$) називається *неперервною в точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо вона...

- А) визначена лише в цій точці
 Б) визначена в цій точці і деякому її околі
 В) має границю $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M)$
 Г) має границю $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)$
 Д) ця границя рівна значенню функції z в точці M_0

1.9 Знайдіть d^2z , якщо $z = x^3y^2$

- А) $d^2z = 6xy^2dx^2 + 12x^2ydx dy + 2x^3dy^2$
 Б) $d^2z = 6xy^2dx^2 + 6x^2ydx dy + 4x^3dy^2$
 В) $d^2z = 6xy^2dx^2 + 2x^3dy^2$
 Г) $d^2z = 6xy^2dx^2 + 4x^3dy^2$

1.10 Областю визначення якої з функцій буде замкнена чотиривимірна куля радіуса 3?

- А) $y = \sqrt{-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 9}$ Б) $u = \arcsin\left(\frac{x^2}{8} \frac{y^2}{16} \frac{z^2}{25} - 2\right)$
 В) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ Г) жодної з даних функцій

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left[(x^2 + 3y^2) \sin \frac{1}{x^2 + 3y^2} \right]$. Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між стаціонарними точками функції $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ та характером екстремуму в цій точці.

А	$(-2; -1)$	1)	<i>в даній точці екстремуму не має</i>
Б	$(2; 1)$	2)	<i>точка максимуму</i>
В	$(-1; -2)$	3)	<i>точка мінімуму</i>

2.3 Знайдіть значення виразу $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ в точці $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$, де $z = \sin x \cdot \sin y$.
Відповідь запишіть цілим числом.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Функцію двох змінних $z = f(x; y)$ називають неперервною в точці $M_0(x_0; y_0)$, якщо ... і виконується рівність

3.2 Обчислити частинні похідні від функції $z = x^2 + y^2 + 3x + 7y - 30$ (розпишіть все поетапно).

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ називається повним диференціалом функції $f(x, y)$ в точці (x_0, y_0) , якщо...

$$\text{B) } P = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, Q = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

$$\Gamma) \quad P = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, Q = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

Д) правильна відповідь відсутня

1.2 Чому дорівнює границя функції $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (\frac{2xy}{x^2+y^2})$?

А) 0 Б) 4 В) 18 Г) $+\infty$ Д) функція границі не має

1.3 Точкою максимуму функції $z = 1 - x^2 - y^2$ буде ...

A) $(0; 0; 0)$ B) $(0; 0; -1)$ B) $(0; 0; 1)$ Γ) $(1; 0; 0)$

1.4 Яке з тверджень правильне? Функція $z = xy$...

А) не має точок екстремуму Б) має одну точку максимуму $(0;0)$

В) має одну точку мінімуму $(0;0)$ Г) має декілька точок екстремуму

Д) має нескінчену кількість точок екстремуму

1.5 Знайдіть правильні твердження, що стосуються достатніх умов існування або відсутності точок екстремуму функції $z = f(x; y)$ (далі: $M_0(x_0, y_0)$ –

$$A = f''_{xx}(M_0), \Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

стаціонарна точка функції,

А) якщо $\Delta > 0$, то $z = f(x, y)$ має в точці M_0 максимум

Б) якщо $\Delta > 0$ і $A < 0$, то $z = f(x, y)$ має в точці M_0 максимум

В) якщо $\Delta > 0$ і $A > 0$, то $z = f(x, y)$ має в точці M_0 мінімум

Г) якщо $\Delta < 0$, то $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум

Д) якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 екстремумів не має

Е) якщо $\Delta = 0$, то $z = f(x, y)$ має в точці M_0 екстремум

- 1.6 Знайдіть рівність, котра буде хибною для функції $u = e^{x/y}$.
- А) $u'_x - u'_y + y \cdot u''_{xy} = 0$ Б) $2u''_{xx} + 2u''_{xy} + u''_{yy} = -\frac{x}{y^2} \cdot u'_y$
 В) $u'_y + x \cdot u''_{xx} = 0$ Г) $u'_x = y \cdot u''_{xx}$
 Д) всі вказані рівності будуть вірними для даної функції
- 1.7 Серед похідних другого порядку оберіть мішані похідні функції $z = f(x; y)$.
- А) z''_{xx} Б) z''_{xy} В) z''_{yy} Г) z''_{yx}
 Д) серед поданих похідних мішаних не має
- 1.8 Стаціонарною точкою функції $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ буде...
- А) $(1; -1)$ Б) $(-3; 0)$ В) $(0; 3)$ Г) $(-\infty; +\infty)$
- 1.9 Знайдіть максимальне значення $z_{\max}$ функції $z = 4 - x^2 - y - 4y^2$. Відповідь запишіть цілим числом, яке визначається добутком $16 \cdot z_{\max}$.
- А) 16 Б) 32 В) 47 Г) 62 Д) 69 Е) 96
- 1.10 Оберіть хибне з основних понять функції двох змінних.
- А) Лінію, що обмежує область визначення, називають *межею області*
 Б) Точки області, що не лежать на межі, називаються *внутрішніми*.
 В) Область, що складається з одних внутрішніх точок, називається *відкритою*.
 Г) Область без приєднаною до неї межі називається *замкнутою*, позначається D .
 Д) Безліч значень, що приймаються функцією в області визначення, називається *областю значень* цієї функції.

Достатній рівень
Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

- 2.1 Знайдіть суму частинних похідних функції $z = x^{2y}$ в точці $(1; 1)$. Відповідь запишіть цілим числом.
- 2.2 Дайте означення лінії рівня.
- 2.3 Знайдіть найбільше значення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в області, що задана системою нерівностей $\begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Відповідь запишіть цілим числом.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Диференціалом функції $z = f(x; y)$ називають ... на прирости відповідних не залежних змінних: $dz = \dots$

3.2 Знайдіть $\frac{\partial y}{\partial x}$, якщо неявна функція $y = f(x)$ задана рівнянням $y^3 + 2y = 2x$ (розпишіть все поетапно).

VI Інтегральне числення

Варіант1

Початковий і середній рівень

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на деякому проміжку, то вона має на цьому проміжку...

- А) похідну Б) первісну В) невизначений інтеграл Г) екстремум

1.2 Чому дорівнює інтеграл $\int \frac{dx}{7x-5}$?

- А) $-\frac{7}{(7x-5)^2} + c$ Б) $\ln|7x-5| + c$
В) $\frac{1}{7}\ln(7x-5) + c$ Г) $\frac{1}{7}\ln|7x-5| + c$

1.3 Обчисліть інтеграл $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ використовуючи підстановку $f(x)=t$.

- А) $\ln|f(x)| + c$ Б) $f(x) + c$ В) $f'(x) + c$ Г) $\ln f(x) + c$

1.4 Дробово-раціональною функцією (або просто раціональним дробом)

називається вираз виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – ...

- А) раціональні функції
Б) многочлени по x степеня n і m відповідно
В) елементарні функції
Г) тригонометричні функції

1.5 Серед поданих тотожностей знайдіть не правильні.

- А) $x dx = \frac{1}{2} dx^2$ Б) $\frac{dx}{x} = d\left(\frac{\ln}{x}\right)$ В) $\cos x dx = d(\sin x)$
Г) $\sin x dx = d(\cos x)$ Д) $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg})$

1.6 При інтегруванні найпростішого раціонального дробу III-го типу отримуємо наступну первісну:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} F(x^2+px+q) + \frac{B-A\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} G\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + c$$

. Визначить які елементи функції позначені через F і G .

- А) $\ln(x^2+px+q), \arcsin \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$ Б) $\sqrt{x^2+px+q}, \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$
 В) $\ln(x^2+px+q), \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$ Г) $\arcsin(x^2+px+q), \arccos \frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$

1.7 Яким має бути коефіцієнт k , щоб рівність була правильною

$$\int x \ln(x+3) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x+3) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{k}{2} \ln(x+3) + c \quad ?$$

- А) -10 Б) -6 В) 7 Г) 8 Д) 9

1.8 Знайдіть правильно підібрані du і v за формулою інтегрування частинам для інтеграла $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$

- А) $du = \frac{dx}{2(1+x)\sqrt{x}}; v = x$ Б) $du = \frac{dx}{1+x}; v = \sqrt{x}$
 В) $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx; v = x$ Г) $du = \frac{1}{1+x^2} dx; v = \sqrt{x}$

1.9 На множині дійсних чисел визначають N типів найпростіших дробів. Визначить величину N .

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5 Д) 6

1.10 Оберіть правильні твердження:

- А) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, якщо $f(x)$ – парна
 Б) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, якщо $f(x)$ – парна
 В) $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$, якщо $f(x)$ – непарна
 Г) $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$, якщо $f(x)$ – непарна

Достатній рівень Частина II

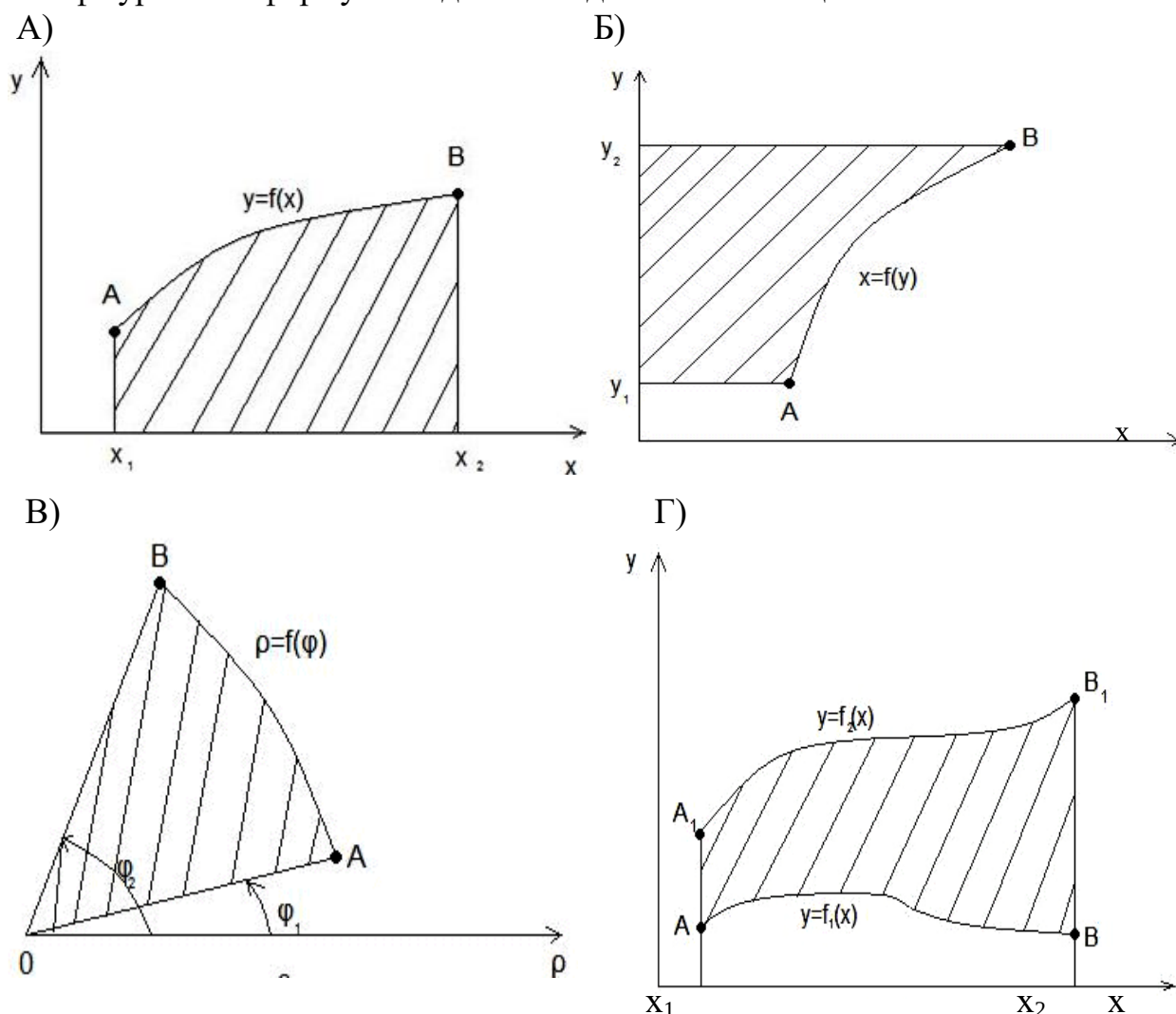
Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть число k , при підстановці якого виконується тотожність

$$\int \frac{dx}{4+25x^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{5x}{2} + c.$$

Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між представленими на малюнках плоскими фігурами та формулами для знаходження їх площ.



1)	2)	3)	4)
$S = \int_{y_1}^{y_2} f(y) dy$	$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$	$S = \int_{x_1}^{x_2} (f_2(x) - f_1(x)) dx$	$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi$

2.3 Маємо інтеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$. Визначить правильну послідовність інтегрування методом підстановки. Відповідь запишіть числами відділеними один від одного комами.

- 1) $\sqrt{2x-9} = t$
- 2) $\frac{2}{3} \arctg \frac{t}{3} + c$
- 3) $\frac{2}{3} \arctg \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + c$
- 4) $x = \frac{t^2+9}{2}; dx = t dt$
- 5) $\int \frac{t dt}{t(t^2+9)} = 2 \int \frac{dt}{t^2+9}$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступній теоремі:

Якщо функція $y = f(x)$... і має скінченну кількість точок ..., то вона інтегрована на цьому відрізку.

3.2 Обчисліть $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 dx$.

Варіант 2
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в кожній точці цього проміжку виконується рівність:

A) $f'(x)=F(x)$

Б) $\int F(x)dx = f(x) + c$

В) $F'(x)=f(x)$

Г) $\int dF(x) = F(x)$

1.2 Чому дорівнює інтеграл $\int 3^x 27^{\frac{x}{3}} dx$?

A) $\frac{9^x}{\ln 9} + c$

Б) $9^x \ln 9 + c$

В) $\frac{3^x}{\ln 3} \frac{27^{\frac{x}{3}}}{3 \ln 27} + c$

Г) $\frac{2 \cdot 3^x}{\ln 3} + c$

1.3 Якою має бути заміна і первісна для інтеграла $\int \sqrt{16-x^2} dx$?

A) $x = 4 \sin t; 8 \ln |16-x^2| + \sqrt{16-x^2} + c$

Б) $x = 4 \operatorname{tg} t; 8 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} x \sqrt{16-x^2} + c$

В) $x = \frac{4}{\cos t}; 8 \operatorname{arctg} 4x + x \sqrt{16-x^2} + c$

Г) $x = 4 \sin t; 8 \arcsin \frac{x}{4} + \frac{1}{2} x \sqrt{16-x^2} + c$

1.4 Раціональний дріб виду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо виконується наступна вимога:

A) $n \leq m$

Б) $n < m$

В) $n > m$

Г) $n = m$

1.5 Представте неправильний дріб $\frac{x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 1}{x^3 + x}$ у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу. Оберіть правильну відповідь:

A) $x^2 + 2x + \frac{2x^3 - 4x^2 - x + 1}{x^3 + x}$

Б) $x + 2 + \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^3 + x}$

В) $x^2 + 2 + \frac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x}$

Г) $x^2 + 2x + 2 + \frac{-4x^2 - 3x + 1}{x^3 + x}$

1.6 Для інтеграла $\int \frac{-4x^2 - 3x + 1}{x^3 + x} dx = \ln|x| - \frac{k}{2} \cdot \ln|x^2 + 1| - n \cdot \operatorname{arctg} x + c$ знайдіть відповідно k і n .

A) 3 і 5

Б) 2 і 4

В) 7 і 9

Г) 5 і 3

Д) 1 і 6

1.7 Яким має бути коефіцієнт k , щоб рівність була правильною

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{e^{2x}}{k} (3 \sin 3x + 2 \cos 3x) + c \quad ?$$

- А) -10 Б) -9 В) 11 Г) 12 Д) 13

1.8 Знайдіть правильно підібрані du і v за формулою інтегрування частинам для інтеграла $\int x \ln(x^2 + 5) dx$.

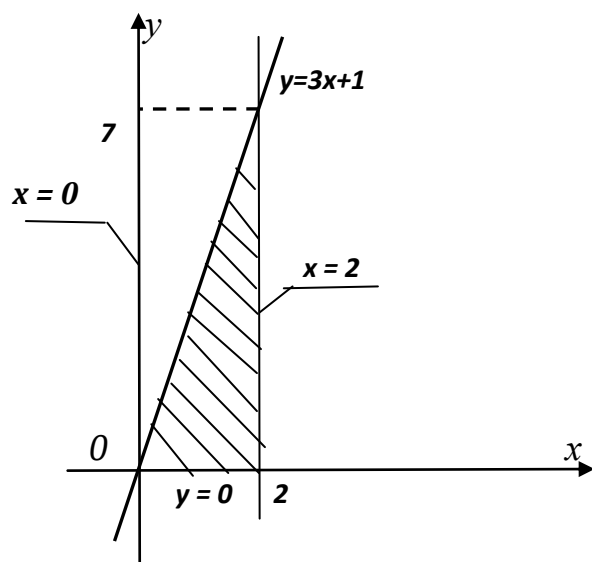
А) $du = \frac{dx}{5+x^2}; v = \frac{x^2}{2}$

Б) $du = \frac{2x}{5+x^2}; v = \frac{x^2}{2}$

В) $du = \ln(x^2 + 5) dx; v = \frac{1}{x}$

Г) $du = \frac{2x}{5+x^2} dx; v = \frac{x^2}{2}$

1.9 Обчисліть площу фігури обмеженої лініями $y = 3x + 1$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$.



- А) 8
Б) 7
В) 6
Г) 5

1.10 Оберіть правильну форму запису формул інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

А) $\int_a^b u(x) du(x) = u(x)v(x) - \int_a^b v(x) du(x)$

Б) $\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$

В) $\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v(x) du(x)$

Г) $\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u(x) dx$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть число k , при підстановці якого виконується тотожність

$$\int -\frac{\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = k \cdot \cos \sqrt[3]{x} + c.$$

Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між невизначеними інтегралами та сукупністю первісних.

А	$\int x^n dx$
Б	$\int a^{kx} dx$
В	$\int \frac{dx}{ax+b}$
Г	$\int \sin kx dx$
Д	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

1)	$\operatorname{tg} x + c, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
2)	$\frac{a^{kx}}{k \ln a} + c, 0 < a \neq 1$
3)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$
4)	$\frac{1}{k} a^{kx} \ln a + c, 0 < a \neq 1$
5)	$\frac{1}{a} \ln ax + b + c$
6)	$-\frac{1}{k} \cos kx + c$

2.3 Обчисліть $\int_{-1}^3 (1 - 2x + 3x^2) dx$. Відповідь запишіть цілим числом.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на проміжку X , якщо ... виконується умова

3.2 Відомо, що попит на деякий товар задається функцією $p = \frac{231}{q+1}$, пропозиція – функцією $p = q + 11$. Визначить величину виграшу споживача при покупці даного товару.

Варіант 3
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Хибними будуть наступні властивості невизначеного інтеграла ...

- А) $\int (kf(x)) dx = k \int f(x) dx$ ($k = \text{const}$)
Б) $\int (f(x)g(x)) dx = (\int f(x) dx)(\int g(x) dx)$
В) $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
Г) $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{\int f(x) dx}{\int g(x) dx}, g(x) \neq 0$

1.2 Чому дорівнює інтеграл $\int \frac{dx}{4+3x^2}$?

- А) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2+x\sqrt{3}}{2-x\sqrt{3}} \right| + c$
Б) $\frac{1}{2} \arctg \frac{3x}{2} + c$
В) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{x\sqrt{3}}{2} + c$
Г) $\frac{1}{3} \ln |4 + 3x^2| + c$

1.3 Обчисліть інтеграл $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx$ використовуючи підстановку $f(x) = t$.

- А) $2\sqrt{f(x)} + c$ Б) $\frac{1}{2}\sqrt{f(x)} + c$ В) $\ln \sqrt{f(x)} + c$ Г) $\frac{2}{\sqrt{f(x)}} + c$

1.4 Якою має бути заміна для інтеграла $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+7)\sqrt{x}}$?

- А) $\sqrt[3]{x} = t; dx = 3t^2 dt$ Б) $\sqrt[6]{x} = t; dx = 6t^5 dt$
В) $\sqrt{x} = t; dx = 2t dt$ Г) $\sqrt[6]{x} = t; dx = t dt$

1.5 Знайдіть $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)}$, розклавши дріб на суму найпростіших та оберіть правильну відповідь:

- А) $\ln|x| + \ln|x+1| + \ln|x+2| + c$ Б) $\ln \sqrt{x(x+1)} - \ln|x+2| + c$
В) $\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \ln|x+2| + c$ Г) $\frac{1}{2} \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x+2| + c$

1.6 Знайдіть k і n відповідно для інтеграла:

- $\int \frac{x^3 + 10}{x^3 - 6x^2 + 10x} dx = x + \ln|x| + k \cdot \ln \sqrt{x^2 - 6x + 10} + n \cdot \arctg(x - 3) + c$
А) 5 і 11 Б) 2 і 4 В) 7 і 9 Г) 6 і 12 Д) 17 і 8

1.7 Обчислити $\int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$.

- А) -2 Б) -1 В) 3 Г) 4 Д) 5

1.8 Яким має бути коефіцієнт k , щоб рівність була правильною

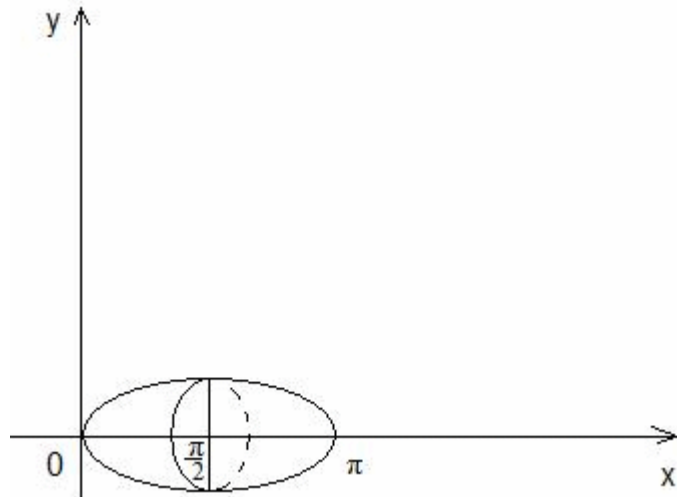
$$\int \operatorname{arctg}(3x) dx = x \operatorname{arctg} 3x + \frac{1}{k} \ln(1+9x^2) + c ?$$

- А) -8 Б) -7 В) -6 Г) 4 Д) 5

1.9 Знайдіть площу фігури, обмеженої наступними лініями: $y^2 = 8x$,
 $2x - 3y + 8 = 0$.

- А) $\frac{4}{3}$ Б) $\frac{5}{7}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{3}{4}$ Д) $\frac{6}{5}$

1.10 Обчисліть об'єм тіла обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди $y = \sin x$ на відрізок $[0; \pi]$



- А) $\pi^2 - 1$
 Б) $\frac{1}{3} \pi^2$
 В) $\frac{1}{2} \pi$
 Г) $\frac{1}{2} \pi^2$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть число k , при підстановці якого виконується тотожність

$$\int \frac{dx}{x^2 - 12} = \frac{\sqrt{3}}{k} \ln \left| \frac{x - 2\sqrt{3}}{x + 2\sqrt{3}} \right| + c.$$

Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між прогалинами у означенні та виразами поданими у таблиці.

Якщо існує скінчена границя I інтегральної суми ... (А) для функції $f(x)$ на ... (Б) при умові ... (В) і ця границя не залежить ні від способу розбиття $[a; b]$ на частини, ні від вибору в них точок ξ_k , то функція $f(x)$ називається інтегрованою на $[a; b]$; число I називається визначеним інтегралом від $f(x)$ на $[a; b]$ і позначається символом ... (Г).

1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\max_{k=1, n} \Delta x_k \rightarrow 0$	$[a; b]$	$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$	$\sum_{k=1}^n f(x) dx$	$\int_a^b f(x) dx$	$(a; b)$

2.3 Обчисліть $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$. Відповідь запишіть цілим числом.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступній теоремі:

Якщо функція $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ всюди ..., то вона неінтегрована

3.2 Дана крива попиту $p = 10 - \frac{1}{2}q$. Які грошові втрати споживача при введенні на даний товар податку з одиниці прододів у розмірі 1 грн., якщо відомо, що спочатку ринкова рівновага на даному ринку спостерігалась при ціні $P^* = 2$ грн.?

Варіант 4
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Знайдіть інтеграл $\int \frac{dx}{x^3}$.

- А) $-3x^{-4}+c$ Б) $-\frac{1}{2x^2}+c$ В) $\frac{x^2}{2}+c$ Г) $\frac{1}{2x^2}+c$

1.2 Якою повинна бути заміна в інтегралі $\int (7-3x)^{21} dx$?

- А) $t = \frac{1}{3}x$ Б) $t = (7-3x)^{21}$ В) $t = 7-3x$ Г) $t = 3x$

1.3 Для інтеграла $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$ виконали підстановку $\sqrt{2-x^2}=t$. Знайдіть правильну заміну виразу $x^3 dx$.

- А) $t(t^2-2)dt$ Б) $2t\sqrt{2-t^2} dt$ В) $(2-t^2)\sqrt{2-t^2} dt$ Г) $3t^2 dt$

1.4 Оберіть правильну первісну для інтегрування дробу I типу $\int \frac{A}{x-a} dx =$, де A і a – дійсні числа.

- А) $A \ln|x| - \frac{A}{a}x + c$ Б) $A \ln(x-a) + c$ В) $\frac{A}{2}(x-a)^{-2} + c$ Г) $A \ln|x-a| + c$

1.5 Чому дорівнює k у наступній рівності $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx = \frac{1}{k} \cdot (x^3 + \ln|x^3-1|) + c$?

- А) 2 Б) 3 В) 4 Г) 5

1.6 Знайдіть об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється в результаті обертання еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ навколо осі Ox .

- А) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ Б) $\frac{4}{3}\pi a^2 b^2$ В) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ Г) πab Д) $\frac{3}{4}a^3 b^2$

1.7 Обчислити $\int_1^e \ln x dx$.

- А) -2 Б) -1 В) 1 Г) 2 Д) 3

1.8 Знайдіть правильно підібрані du і v за формулою інтегрування частинам для інтеграла $\int e^x \sin x dx$

А) $du = e^x dx$; $v = -\cos x$

Б) $du = \sin x dx$; $v = e^x$

В) $du = e^x dx$; $v = \cos x$

Г) $du = \cos x dx$; $v = e^x$

1.9 Обчисліть $\int_{-a}^{+a} x^3 dx$.

А) -1

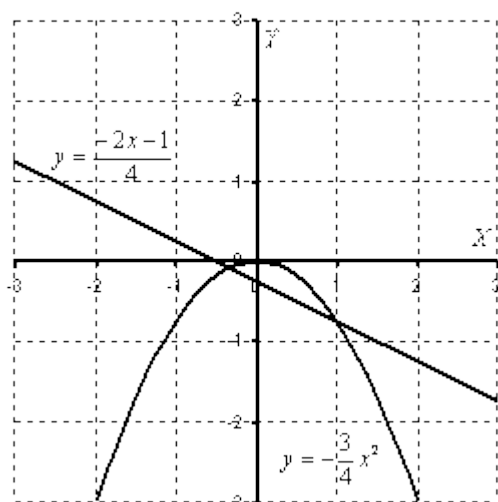
Б) 0

В) 1

Г) $3a$

Д) $6a$

1.10 Знайдіть площу фігури обмеженої лініями $3x^2 + 4y = 0$, $2x + 4y + 1 = 0$



А) $3,4$

Б) 2

В) $0,1$

Г) $0,2$

Д) $0,3$

Достатній рівень
Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть число k , при підстановці якого виконується тотожність

$$\int \frac{e^{2x} + e^x}{e^x - 1} dx = e^x + k \cdot \ln|e^x - 1| + c.$$

. Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між первісною та табличним інтегралом.

А	$\ln x + \sqrt{x^2 + a} , x^2 + a > 0$
Б	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}, a > 0$
В	$\frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right , x \neq \pm a, a > 0$
Г	$\arcsin \frac{x}{a}, x \in (-a; a), a > 0$
Д	$\operatorname{arctg} x$

1)	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$
2)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
3)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
4)	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$
5)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}$
6)	$\int \frac{dx}{1 + x^2}$

2.3 Обчисліть інтеграл $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x}$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини:

Економічний зміст визначного інтеграла: кількість продукції, що ... до моменту T_2 , дорівнює визначеному інтегралу від ..., причому нижньою та верхньою границями інтегрування є моменти початку T_1 та завершення T_2 спостережуваного періоду.

3.2 Обчислити $\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx$.

Варіант 5
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Чому дорівнює інтеграл $\int (x+2)^2 dx$?

- А) $\frac{(x+2)^2}{3} + c$ Б) $\frac{x^3}{3} + 4x + c$ В) $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c$ Г) $2x^2 + 4x + c$

1.2 Метод підстановки в інтегруванні базується на наступному твердженні:

$\int g(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = G(\varphi(x)) + c$ на деякому проміжку (a;b). Визначить якою повинна бути функція $\varphi(x)$ на проміжку(a;b).

- А) неперервною Б) обмеженою В) монотонною
Г) інтегрованою Д) диференційованою

1.3 Обчисліть інтеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ використовуючи підстановку $\sqrt{x}=t$.

- А) $2\ln(1+\sqrt{x}) + c$ Б) $\frac{x^2}{2} - \ln|1+x| + c$
В) $\sqrt{x}\ln(1+\sqrt{x}) + c$ Г) $2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + c$

1.4 Оберіть правильну первісну для інтегрування дробу II типу $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx =$, де A і a – дійсні числа, $k \geq 2$.

- А) $\frac{A}{k} \ln|x-a| + c$ Б) $-\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + c$
В) $A \ln(x-a)^{k+1} + c$ Г) $-\frac{A}{(k+1)(x-a)^{k+1}} + c$

1.5 Знайдіть $\int \frac{x dx}{(x+1)(x-2)^2}$, розклавши дріб на суму найпростіших та оберіть правильну відповідь:

- А) $\frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right) + c$ Б) $\frac{1}{9} \ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2}{3(x-2)} + c$
В) $\frac{1}{9} \ln|(x+1)(x-2)| - \frac{2}{9(x-2)} + c$ Г) $2\ln|x-2| + x - \ln|x-1| + c$

1.6 Знайдіть число k , при підстановці якого у первісну виконується тотожність $\int (7-3x)^{23} dx = \frac{1}{k} (7-3x)^{24} + c$.

- А) -30 Б) -46 В) 58 Г) 64 Д) 72

1.7 Обчисліть $\int_0^{\pi} x \cos x dx$.

- А) 1 Б) 0 В) -1 Г) -2 Д) -3

1.8 Яким має бути коефіцієнт k , щоб рівність була правильною

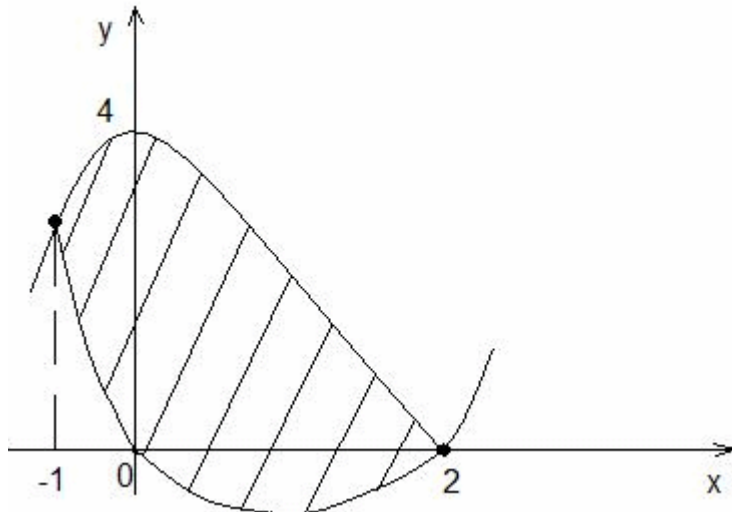
$$\int x e^{\frac{x}{3}} dx = k x e^{\frac{x}{3}} + 3 k e^{\frac{x}{3}} + c ?$$

- А) -5 Б) -4 В) -3 Г) 1 Д) 2

1.9 Формула Ньютона – Лейбніца $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ виконується при умові...

- А) $F'(x) = f(x)$ Б) $F(x)$ – неперервна на $[a; b]$; $F'(x) = f(x)$
 В) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ Г) $f(x)$ – неперервна на $[a; b]$; $F'(x) = f(x)$

1.10 Обчисліть площу, обмежену параболою $y = 4 - x^2$ і $y = x^2 - 2x$



- А) 11
 Б) 12
 В) 13
 Г) 14
 Д) 15

*Достатній рівень
 Частина II*

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть число k , при підстановці якого виконується тотожність

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+2}} = \frac{\sqrt{3}}{k} \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2+2}| + c . \text{ Відповідь запишіть цілим числом.}$$

2.2 Встановіть відповідність між функціями та їх властивостями. Заміна змінної у визначеному інтегралі може бути виконана за формулою:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Функція	
А	$f(x)$
Б	$\varphi(t)$
В	$\varphi'(t)$

Властивість	
1)	неперервна функція на $[\alpha; \beta]$, де $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$
2)	неперервна функція на $[a; b]$
3)	монотонна і неперервна функція на $[\alpha; \beta]$, де $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$
4)	монотонна функція на $[a; b]$

2.3 Продуктивність роботи (в умовних одиницях) протягом робочого дня описується функцією $f(t) = -t^2 + 8t + 3$. Обчисліть кількість продукції, випущеної протягом робочого дня ($0 \leq t \leq 8$).

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступній теоремі:

Якщо функція $y = f(x)$ обмежена на відрізку $[a; b]$ і має ... точок розриву, то вона інтегрована

3.2 Обчисліть $\int \frac{5x^3 dx}{4+x^8}$ (розпишіть все поетапно).

VII Диференціальні рівняння

Варіант 1

Початковий і середній рівень

Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Диференціальним називається рівняння у якого невідома функція входить...

А) під знак інтеграла

Б) під знак похідної або диференціала

В) під знак логарифма

Г) під знак кореня

1.2 Функція являється розв'язком рівняння ...

А) $xy' = y + x \sin x$

Б) $y' = (1 - y) \cos x$

В) $y = x(y' - x \cos x)$

Г) $y' = \cos(y - x)$

1.3 Серед поданих рівнянь оберіть рівняння з відокремлюваними змінними.

А) $(x + y^2)dx - xy dy = 0$

Б) $\sin^2(x) y^3 y' - 1 = y$

В) $x^2 y' + \cos 2y = x$

Г) $y' - xy^2 = 2xy$

1.4 Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду:

А) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Б) $ay' + by + c = 0$

В) $f(x)dx = g(y)dy$

Г) $y' = f(x, y)$

1.5 Якими методами можна інтегрувати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння?

А) підбору

Б) Коші

В) варіації сталих

Г) Бернуллі

1.6 Диференціальні рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називаються рівняннями в повних диференціалах, якщо існує така функція $U = U(x, y)$, повний диференціал якої має наступний вигляд:

А) $dU = U'_x dx + U'_y dy$

Б) $dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

В) $dU = P'_x dx + Q'_y dy$

Г) $dU = P'_y dx + Q'_x dy$

1.7 Оберіть серед наведених $\mu(x)$ інтегруючий множник для рівняння: $(x^4 + x + x^2 y^2)dx + y dy = 0$

А) $\mu(x) = e^{\frac{2x^3}{3}}$

Б) $\mu(y) = e^y$

В) $\mu(xy) = (xy)^2$

Г) $\mu(x^2 + y^2) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

1.8 Вкажіть правильну заміну для розв'язування рівняння $y \cdot y'' = y^2 \cdot y' + (y')^2$.

А) $y' = p(x), y'' = p'(x)$

Б) $y' = p(y), y'' = p'_y \cdot p(y)$

В) $p = \frac{y}{x}$

Г) $p = y \cdot y'$

Д) $p = (y')^2$

Е) правильна відповідь відсутня

1.9 Вкажіть частинні розв'язки рівняння $x \cdot y'' + x(y')^2 + y' = 0$

А) $y = 5$

Б) $y = 5x^2$

В) $y = \ln|\ln|x||$

Г) $y = \ln|x|$

Д) правильна відповідь відсутня

1.10 Порядок яких рівнянь можна знизити за допомогою заміни $y' = p(y)$?

А) $xy'' + x(y')^2 + y' = 0$

Б) $4y'' \cdot \sqrt{y} = 1$

В) $x \cdot y'' = 1$

Г) $y'' + 3y' = 2x$

Д) $y'' = 5y^2$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$\sqrt{1 - y^2} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0$$

2.2 Розмістіть рівняння в порядку зростання диференціального рівняння:

А	$(y')^4 + y y' = \sin x$
Б	$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2xy \frac{\partial y}{\partial x} = x^3$
В	$x^5 y' + 5xy = y^6$
Г	$y' y + 3xy^{(4)} = \sqrt{x}$

2.3 Розв'яжіть рівняння $y^2 dy + x dx = 0$.

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Розв'язок диференціального рівняння, який одержують із загального розв'язку наданням конкретних значень ..., що входять ..., називають частинним розв'язком диференціального рівняння.

3.2 Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y' = \frac{2}{x+2y} - 3$

(розпишіть все поетапно).

Варіант 2
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Розв'язком диференціального рівняння $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ називається функція $y = y(x)$, якщо вона ...

- А) задовольняє початкову умову
Б) n раз диференціюється на I
В) монотонна на проміжку I
Г) при підстановці перетворює рівняння у тотожність

1.2 Знайдіть загальний інтеграл рівняння $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tgy}$:

- А) $\operatorname{Siny} = c \operatorname{Cos} x$ Б) $\frac{1}{\sin^2 y} = \frac{c}{\cos^2 x}$ В) $\operatorname{Siny} \operatorname{Cos} x = c$ Г) $\operatorname{tgy} \operatorname{ctg} x = c$

1.3 Рівняння родини ізоклін для диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ буде наступним:

- А) $x^2 + y^2 = k, k \geq 0$ Б) $y = kx$ В) $y = kx + b$ Г) $y = kx^2$

1.4 Оберіть правильну заміну для розв'язування однорідного диференціального рівняння:

- А) $y' = yz$ Б) $y = \frac{u}{v}, y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
В) $y = UV, y' = U'V + UV'$ Г) $y = Ux, y' = U'x + U$

1.5 Оберіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - \frac{y}{x} = x$.

- А) $y = x^2 + cx$ Б) $y = c(x^2 + x)$ В) $y = cx^2 + x$ Г) $y = x^2 + x + c$

1.6 Який вигляд має заміна Бернуллі для розв'язування лінійного диференціального рівняння?

- А) $y = Ux, y' = U'x + U$ Б) $y = UV, y' = U'V + UV'$
В) $y = \frac{u}{v}, y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ Г) $y' = yz$

1.7 Знайдіть інтегруючий множник та розв'яжіть рівняння:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$$

- А) $\mu = e^x, e^x(x^2 + y^2) = c$ Б) $\mu = e^y, e^y(x + y) = c$
В) $\mu = e^{2x}, 2x + \ln(x^2 + y^2) = c$ Г) $\mu = e^{2y}, e^{2x}(x^2 + y^2) = c$

1.8 Вкажіть рівняння, що явно не містять змінну x .

- А) $y \cdot y'' = y^2 + y'$ Б) $y' \cdot x^2 = (y')^2 + y''$ В) $y \cdot y'' = (y')^2$
 Г) $y''' = 2(y'' - 1) \cdot \operatorname{ctgx}$ Д) $x \cdot y'' + y' = 0$

1.9 Якою змінною рівняння $x^2 y'' = (y')^2$ зводиться до диференціального рівняння 1-го порядку?

- А) правильна відповідь відсутня Б) $p = (y')^2$ В) $p = \frac{y}{x}$
 Г) $y' = p(y), y'' = p'_y \cdot p(y)$ Д) $y' = p(x), y'' = p'(x)$

1.10 Який вигляд має лінійне диференціальне рівняння другого порядку?

- А) $y''' + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ Б) $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$
 В) $a_2(x)y' + a_1(x)y = 0$ Г) $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Рівняння $2x^4 y y' + y^4 = 4x^6$ можна звести до однорідного, зробивши заміну: $y = (z(x))^m$. Визначить степінь m , який дозволяє це виконати.

2.2 Встановіть відповідність між диференціальним рівнянням 2-го порядку та типом диференціального рівняння, отриманого після зниження порядку.

А	$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x} + \frac{y'}{x}$	1)	рівняння Бернуллі
Б	$y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \sin 2x$	2)	лінійне
В	$y \cdot y'' + (y')^3 = (y')^2$	3)	в повних диференціалах
Г	$y'' = 2(y' - 1) \cdot \operatorname{ctgx}$	4)	з відокремлюваними змінними
		5)	однорідне

2.3 Відшукайте загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означені:

Диференціальне рівняння першого порядку виду ... називають однорідним, якщо $P(x; y)$ і $Q(x; y) \in \dots$.

3.2 Розв'яжіть рівняння $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$
(розпишіть все поетапно).

Варіант 3
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Загальним інтегралом диференціального рівняння $F(x, y, y', \dots, y^n) = 0$ є родина функцій виду ...

А) $\varphi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$

Б) $y = \varphi(x, c)$

В) $\varphi(x, y, c_1, c_2) = 0$

Г) $y = c_1 \varphi(x) + c_2$

1.2 Рівняннями з відокремлюваними змінними будуть рівняння виду:

А) $y' = f(x, y)$

Б) $f(y) dy = g(x) dx$

В) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Г) $y' = g(x) p(y)$

1.3 Знайдіть загальний інтеграл рівняння $x(y^2 - 4) dx + y dy = 0$.

А) $\frac{y^2}{2} - 4 \ln y = \frac{x^2}{2} + c$

Б) $y^2 - 4 = ce^{x^2}$

В) $y^2 - 4 = ce^{-x^2}$

Г) $\sqrt{y^2 - 4} = ce^{x^2}$

1.4 Серед запропонованих оберіть однорідні диференціальні рівняння.

А) $xy' = y - xe^{y/x}$

Б) $y + \sqrt{xy} = xy'$

В) $(y^2 - 2x)dx + x^2 dy = 0$

Г) $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$

Д) $xy' + y(x + 1) = x^2$

1.5 Чи можна назвати рівняння $\left(\frac{1}{y \sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 xy}\right) dx + \left(\frac{x}{\cos^2 xy} + 5^{xy} \ln 5\right) dy = 0$ рівнянням в повних диференціалах?

А) так Б) при певних умовах В) ні Г) не можливо визначити

1.6 Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $xy' = y + \ln x$ знаходять методом варіацій, вважаючи що $y = c(x)x$. Знайдіть та оберіть $c(x)$.

А) $c(x) = c + \frac{1 - \ln x}{x}$

Б) $c(x) = c - \frac{1 + \ln x}{x}$

В) $c(x) = cx - \ln x$

Г) $c(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

1.7 Нехай функції $P(x, y); Q(x, y); P'_y(x, y); Q'_x(x, y)$, неперервні в однозв'язній області D . Тоді для того, щоб рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ було рівнянням в повних диференціалах, виконання тотожності $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y); \forall (x, y) \in D$ є умовою:

А) бажаною Б) достатньою В) необхідною і достатньою Г) необхідною

1.8 Функцію $U(x,y)$ при розв'язуванні рівняння в повних диференціалах $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ знаходять:

- А) шляхом розв'язування системи:
$$\begin{cases} U'_x(x,y) = P(x,y) \\ U'_y(x,y) = Q(x,y) \end{cases}$$
- Б) шляхом розв'язування системи:
$$\begin{cases} U'_x(x,y) = P'_y(x,y) \\ U'_y(x,y) = Q'_x(x,y) \end{cases}$$
- В) за допомогою криволінійного інтеграла:

$$U(x,y) = \int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Г) за допомогою криволінійного інтеграла:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy$$

Д) за допомогою подвійного інтеграла: $\iint_D U(x,y)dxdy$

1.9 Серед поданих нижче рівнянь вкажіть те, яке отримується після заміни $y' = p(y)$ з рівняння $y \cdot y'' + y = (y')^2$?

- А) $y \cdot p' + y = p^2$ Б) $y \cdot p' \cdot p + y = p^2$ В) $y \cdot p' + y = y^2$
- Г) $y \cdot p' \cdot p + y = y^2$ Д) правильна відповідь відсутня

1.10 Проінтегруйте наступне рівняння: $udx - xdy = 0$

- А) $y = -2x$ Б) $y = Cx^2$ В) $y = Cx$ Г) правильна відповідь відсутня

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть частинний розв'язок рівняння $y'' = 2y^3$, що задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Вкажіть значення $y(2) = \dots$. Відповідь запишіть цілим числом.

2.2 Встановіть відповідність між диференціальним рівнянням та його типом.

А	$(2x - y)dx - 3xdy = 0$	1)	диференціальне рівняння 2-го порядку
Б	$xy' - 4y = 2x^3$	2)	однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку
В	$y'' - \sin x = 2$	3)	диференціальне рівняння 1-го порядку з відокремленими змінними
Г	$xdx + ydy = 0$	4)	диференціальне рівняння 1-го порядку в повних диференціалах
		5)	лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку

2.3 Відшукайте загальний розв'язок рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Рівняння, що містить ..., шукану функцію $y = f(x)$ і її ..., називають диференціальними.

3.2 Знайдіть загальний розв'язок рівняння $y' + 2xy = 2x$

Варіант 4
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Для наближеної побудови інтегральних кривих використовують метод ...

- А) ізотерм
Б) Ейлера
В) невизначених коефіцієнтів
Г) ізоклін

1.2 Задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, формулюють наступним чином (визначить правильні варіанти відповіді).

- А) знайти розв'язок $y(x)$ такий, що $y(x_0) = y_0$
Б) знайти розв'язок $y(x)$ такий, що $y(x_0) = f(x_0, y_0)$
В) знайти інтегральну криву, що проходить через задану точку (x_0, y_0)
Г) знайти родину інтегральних кривих виду $y = \varphi(x, c)$

1.3 Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $(1 + x^2)dy + dx = 0$ при початковій умові $y(1) = 1$.

- А) $y = \frac{\pi}{4} e^{\arctg x}$ Б) $y = e^{\frac{\pi}{4}} - \arctg x$ В) $y = 2\sqrt{1 + x^2}$ Г) $y = \frac{1}{2}(1 + x^2)$

1.4 Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння виду:

- А) $y' + p(x)y = f(x)$ Б) $y' + p(x)y = f(x)y^2$
В) $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ Г) $f(x)fx = g(y)dy$

1.5 Які серед наведених рівнянь є рівняннями в повних диференціалах?

- А) $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$ Б) $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$
В) $(x^2 + \sin y)dx + (x \cos y + \sin^2 y)dy = 0$ Г) $(xy + e^x)dx - xdy = 0$
Д) $(4xy + 3y - 5x)dx + (2x^2 + 3x - 7)dy = 0$

1.6 Знайдіть розв'язок рівняння $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$.

- А) $2xy + \frac{3x^2y^2}{2} + \frac{x^4}{4} - 3y^2x = c$ Б) $3x^2y^2 + x^3 = c$
В) $x^2 + 2x^3y - y^3 = c$ Г) $x^2 + x^3y - y^3 = c$

1.7 Розв'яжіть задачу Коші та вкажіть правильну відповідь:

- $\left(\frac{x}{y} + 2y \cos 5x\right)dy - (5y^2 \sin 5x - \ln y)dx = 0; y(0) = e$
А) $x \ln y + y^2 \cos 5x = e^2$ Б) $x \ln y + y^2 \sin 5x = 0$
В) $x^2 \ln y + y \cos 5x = e$ Г) $xe^y + y(\sin 5x + \cos 5x) = e$

1.8 Вкажіть рівняння, що явно не містять змінну y .

- А) $y^3 \cdot y'' = 1$ Б) $y'' \cdot x^3 + y'' \cdot x^2 - 1 = 0$ В) $(x+1) \cdot y'' = y' - 1$
Г) $y'' + 4y' + 4y = 2x$ Д) $3y' \cdot y'' = 2y$

1.9 Яким буде загальний розв'язок рівняння $2y \cdot y'' = 1 + (y')^2$?

- А) $C_1 y = 4 + (C_1 x + C_2)^2$ Б) $C_1 y = 4 - (C_1 x + C_2)^2$
В) правильна відповідь відсутня
Г) $4C_1 y = 4 - (C_1 x + C_2)^2$ Д) $4C_1 y = 4 + (C_1 x + C_2)^2$

1.10 Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{y}{x}$, що задовольняє початковій умові $y(1) = 2$.

- А) $y = 2x$ Б) $y = -2x$ В) $y = 0,5x$ Г) правильна відповідь відсутня

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння при початковій умові $y(0) = 1$, якщо загальний розв'язок рівняння має наступний вигляд: $\arcsin x + \arcsin y = C$

2.2 Заповніть прогалини у наступних формулах:

- 1) Диференціальне рівняння 2-го порядку, що розв'язане відносно старшої похідної та не містить x , має вигляд: $y'' = \square$
2) Диференціальне рівняння 2-го порядку, що розв'язане відносно старшої похідної та не містить ні y ні y' , має вигляд: $y'' = \square$

2.3 Відшукайте загальний розв'язок рівняння $3y'' - 12y' + 36 = 0$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Рівняння виду $a_0(x)y + a_1(x)y' = f(x)$, де $a_0(x)$, $a_1(x)$, $f(x)$ – ..., називають лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням ... порядку.

3.2 Знайдіть частинні розв'язки рівняння $y'' - y' - 2y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 8$, $y'(0) = 7$.

Варіант 5
Початковий і середній рівень
Частина I

Завдання 1.1 – 1.10 містять від чотирьох до шести варіантів відповідей на кожне поставлене питання. ПРАВИЛЬНИХ відповідей може бути кілька, уважно читайте завдання.

1.1 Оберіть розв'язок диференціального рівняння $(x + 1) dy + xy dx = 0$ серед запропонованих функцій.

- А) $y = (x + 1) e^{-x}$ Б) $y = (x + 1) e^x$ В) $y = (x - 1) e^x$ Г) $y = (x - 1) e^{-x}$

1.2 Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння $y' \times \operatorname{tg} x = y$, при початковій умові $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

- А) $y = e^{\cos x}$ Б) $y = e^{\sin x}$ В) $y = \cos x$ Г) $y = \sin x$

1.3 До однорідних диференціальних рівнянь можна привести рівняння виду:

- А) $y' = f(x, y)$, якщо $f(kx, ky) = f(x, y)$
Б) $y' = f(ax + bx + c)$, де a, b, c – постійні числа
В) $P(x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$,
якщо $P(kx, ky) = k^n P(x, y)$, $Q(kx, ky) = k^n Q(x, y)$
Г) $y' + p(x) = f(x)y^\alpha$, де $\alpha \neq 0; 1$

1.4 Розв'яжіть диференціальне рівняння $(x + 2y)dx - dy = 0$ та оберіть правильний загальний розв'язок.

- А) $y = x(y + c)$ Б) $y = x(cx - 1)$ В) $cy = x(y - x)$ Г) $y = x^2 - cx$

1.5 Чи можна назвати рівняння:

$\left(2^{xy} \cdot y \ln 2 + \frac{1}{1+x^2}\right) dx - \left(\frac{3}{\sin^2 y} - 2^{xy} \cdot x \ln 2\right) dy = 0$ рівнянням в повних диференціалах?

- А) так Б) при певних умовах В) ні Г) не можливо визначити

1.6 Розв'яжіть задачу Коші $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0; y(0) = 0$ та вкажіть правильну відповідь:

- А) $xe^{x+y} + x^3 + ye^{x+y} + y^4 = 1$ Б) $e^{x+y} + x^3 + y^4 = 1$
В) $e^{x+y} + 6x + 12y^2 = 1$ Г) $e^{x+y} + 3x^2y + 4y^3x = 1$

1.7 Оберіть серед наведених $\mu(x)$ інтегруючий множник для рівняння $(x + e^{-2x} + y^2)dx + ydy = 0$.

- А) $\mu(x) = e^x$ Б) $\mu(y) = e^y$ В) $\mu(x) = e^{2x}$ Г) $\mu(y) = e^{2y}$

1.8 Порядок яких рівнянь можна знизити за допомогою заміни $y' = p(x)$?

- А) $xy'' + x(y')^2 + y' = 0$ Б) $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x} + \frac{y'}{x}$ В) $y'' = 5y^2$
 Г) $y'' = y \cdot (y')^2$ Д) $y'' + 3y' = 2x$

1.9 Вкажіть частинний розв'язок диференціального рівняння $y^3 \cdot y'' + 9 = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$, $y'(-\frac{1}{2}) = 2$.

- А) $4y^2 = 24x + 21$ Б) $8y^3 = 108x + 27$ В) $4y^2 = -24x - 3$
 Г) $2y^3 = 27x$ Д) правильна відповідь відсутня

1.10 Проінтегруйте наступне рівняння: $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$

- А) $y = -2x$ Б) $(1 - y) + (1 + x)$ В) $y = Cx$
 Г) $(1 + y) \cdot (1 - x)$ Д) правильна відповідь відсутня

Достатній рівень

Частина II

Розв'яжіть завдання 2.1 – 2.3 з коротким поясненням.

2.1 Проінтегруйте рівняння $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$.

2.2 Встановіть відповідність між диференціальним рівнянням та його типом.

А	$\cos x \sin y dy - \cos y \sin x dx = 0$	1)	лінійне рівняння 2-го порядку з постійними коефіцієнтами
Б	$x^3 y' = y(y^2 + x^2)$	2)	однорідне рівняння
В	$y' - ay = e^{bx}$	3)	рівняння з відокремленими змінними
Г	$y'' + 6y' = 0$	4)	рівняння 1-го порядку в повних диференціалах
		5)	лінійне рівняння 1-го порядку

2.3 Відшукайте загальний розв'язок рівняння $y'' + 16y = 0$

Високий рівень

Частина III

Розв'яжіть завдання 3.1 – 3.2 з повним обґрунтуванням розв'язку задачі або розгорнутою відповіддю на питання.

3.1 Заповніть прогалини у наступному означенні:

Загальним розв'язком диференціального рівняння $F(x; y; y'; y''; y^{(n)}) = 0$ називають такий його розв'язок $y = \varphi(C_1; C_2; \dots; C_n; x)$, у якому ... збігається з порядком рівняння і не може бути зменшена ...

3.2 Знайдіть частинні розв'язки рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y(0) = 8$, $y'(0) = 7$.

Відповіді до завдань у тестовій формі
Частина I

Номер завдання	Варіант				
	<i>I Елементи лінійної алгебри</i>				
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
1.1	В	Д	В	В	Г
1.2	Б	А	Б	А	Г
1.3	Б	Б	А	Г	В
1.4	В	Г	Г	Б	Б; Д
1.5	Г	В	В	А	Б; Г
1.6	А	Г	Д	Г	Д
1.7	Д	А	В	Г	В
1.8	А	А	Б	Д	А
1.9	Б	В; Г; Д	Б	Б	Д
1.10	Д	А	А	А	Д
<i>II Аналітична геометрія</i>					
1.1	Б	Д	В	А; Г	А; В; Г
1.2	В	А	А	Г	Б; В; Д
1.3	А	Б	Б	В	Б
1.4	А	Г	Д	Д	А
1.5	Д	А	Г	В	А
1.6	А	В	Г	А	Г
1.7	Б	Б	Б	В	Б
1.8	А	А	Д	В	Б
1.9	Г	Б	А	Г	В
1.10	В	Д	В	А	В; Г
<i>III Вступ до математичного аналізу</i>					
1.1	В	В	В	Б	Г
1.2	Д	Б	Д	А	В
1.3	А	Б	А	А	А
1.4	А; Б; Г; Д	Д	Б	В	Г
1.5	В	Г	Г	Б	Б
1.6	Б	А	А	Б	Б
1.7	Б	Б	В	В	Д
1.8	Б	В	В; Е	Д	А
1.9	А	Г	Б	В	В
1.10	В	Б	Г	Г	В

Номер завдання	Варіант				
	<i>IV Диференціальне числення функції однієї змінної</i>				
	1	2	3	4	5
1.1	В	А	Д	Б	Д
1.2	Б	В; Е	Б	В	А
1.3	Б	В	А	В	Г
1.4	А	А	Б	А	А
1.5	А	Б	Д	Д	В
1.6	А; Б; В	Г	Б	Г	В
1.7	В	Б	В	Б	Г
1.8	Б	Д	Г	Г	Б
1.9	Г	В	В	Д	Б
1.10	Г	Б	В	Г	А
<i>V Диференціальне числення функції багатьох змінних</i>					
1.1	В	Б; Д	В	Д	Г
1.2	А	Г	Г	В	Д
1.3	Д	А	Д	А	В
1.4	Б	Д	В	А	А
1.5	Г	В	А	Б	Б; В; Д
1.6	Г	Г	Б	Д	Д
1.7	Б	Д	В	Г; Ж	Б; Г
1.8	Б	А; Е	А	Б; Г; Д	В
1.9	В; Г; Д; Е	А	В	А	Д
1.10	А	Б	Б	А	Г
<i>VI Інтегральне числення</i>					
1.1	Б; В	В	Б; Г	Б	В
1.2	Г	А	В	В	В; Д
1.3	А	Г	А	А	Г
1.4	Б	Б	Б	Г	Б
1.5	Г; Д	Г	Г	Б	Б
1.6	В	А	А	А	Д
1.7	Д	Д	Г	В	Г
1.8	А	Г	В	А; Г	В
1.9	В	А	А	Б	Г
1.10	А; Г	Б	Г	Д	Д

Номер завдання	Варіант				
	<i>VII Диференціальні рівняння</i>				
	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
1.1	Б	Б; Г	А	Г	А
1.2	В	В	Б; Г	А; В	Г
1.3	Б; Г	А	В	Б	А; В
1.4	А	Г	А; Б; Г	А	Б
1.5	В; Г	А	В	Б; В; Д	А
1.6	Б	Б	Б	Г	Б
1.7	А	В	Г	А	В
1.8	Б	А; В	А; В; Г	Б; В	А; Б; Д
1.9	А; В	Д	Б	Д	В
1.10	Б; Д	Г	В	А	Г

Відповіді до Частини II та Частини III:

I Елементи лінійної алгебри

Варіант 1

Достатній рівень

Частина II

2.1 А-5; Б-4; В-2; Г-3. 2.2 (4; -3). 2.3 4; 1; 3; 5; 2.

Високий рівень

Частина III

3.1 визначник $(n - 1)$ -го порядку, що одержується з визначника Δ викреслення i -го рядка та j -го стовпчика, ... елемент a_{ij} .

3.2 Розв'язуємо систему за допомогою формул Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{395}{79} = 5;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{158}{79} = -2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

Відповідь: $x = 5, y = -2, z = 3$

Варіант 2

Достатній рівень

Частина II

2.1 2. 2.2 +; -; -; +; +; -. 2.3 55.

Високий рівень

Частина III

3.1 перетворення рядків матриці на стовпчики і навпаки.

3.2 Запишемо нашу систему в матричній формі:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

Робимо перетворення:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -11 \end{array} \right)$$

потім

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ & & & 11 \end{array} \right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array} \right)$$

Відповідь: $x_1 = -4$, $x_2 = -13$, $x_3 = 11$

Варіант 3

Достатній рівень

Частина II

2.1 А-2; Б-5; В-3; Г-4; Д-6. 2.2 21. 2.3 1; 4; 3; 2; 5.

Високий рівень

Частина III

3.1 Якщо вона має розв'язки (хоча б один); не має жодного розв'язку

3.2

Розв'язування: розкладемо визначник за першим рядком:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + a_{13}(-1)^{1+3}M_{13} + a_{14}(-1)^{1+4}M_{14} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - a_{14}M_{14} =$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [3 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) - 0 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 1) + 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1)] -$$

$$- 2 \cdot [1 \cdot (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1) - 0 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot 1) + 2 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 1)] +$$

$$+ 0 \cdot [1 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 1) - 3 \cdot (0 \cdot 0 - 3 \cdot 1) + 2 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)] -$$

$$- 1 \cdot [1 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) - 3 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) - 0 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1)] =$$

$$= 1 \cdot [-9 - 0 - 2] - 2 \cdot [-3 - 0 - 4] + 0 - 1 \cdot [-1 + 6 + 0] =$$

$$= -11 + 14 - 5 = -2.$$

Відповідь: -2 .

Варіант 4

Достатній рівень

Частина II

2.1 4. 2.2 (4; 0). 2.3 А-4; Б-3; В-5; Г-1.

Високий рівень

Частина III

3.1 і достатньо, щоб ранги основної і розширеної матриць системи збігались.

3.2 Як відомо $A^{-1} \cdot A = E$.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{6} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{3}{6} & -\frac{3}{6} \\ -\frac{2}{6} & 0 & \frac{6}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{2}{6} + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 0 \cdot \frac{2}{6} + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot \frac{2}{6} + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -\frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{3}{6} \cdot 2 - \frac{3}{6} \cdot 1 & -\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{3}{6} \cdot 2 - \frac{3}{6} \cdot 0 & -\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{3}{6} \cdot 1 - \frac{3}{6} \cdot 1 \\ -\frac{2}{6} \cdot 3 + 0 \cdot 2 + \frac{6}{6} \cdot 1 & -\frac{2}{6} \cdot 0 + 0 \cdot 2 + \frac{6}{6} \cdot 0 & -\frac{2}{6} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + \frac{6}{6} \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 5

Достатній рівень

Частина II

2.1 А–3; Б–5; В–1; Г–2. **2.2** (6; 7). **2.3** 7.

Високий рівень

Частина III

3.1 найвищий порядок мінору матриці, що відмінний від нуля.

3.2 Доведення:

$$A \cdot E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A$$

II Аналітична геометрія

Варіант 1

Достатній рівень

Частина II

2.1 $x^2 - y^2 = a^2$. **2.2** 45^0 . **2.3** А–4; Б–1; В–5; Г–3.

Високий рівень

Частина III

3.1 геометричне місце точок площини; відстані до заданої прямої, що не проходить через задану точку.

3.2 рівняння кола: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. розкриваємо дужки $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$, або $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$; перемножимо останню рівність на А та положимо $-2aA = D$, $-2bA = E$, $a^2A + b^2A - r^2A = F$:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Варіант 2

Достатній рівень

Частина II

2.1 відстані між його фокусами; $\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$. 2.2 6. 2.3 1 –В; 2 –А ; 3–Г; 4 –Б; 5–Е.

Високий рівень

Частина III

3.1 рівняння; кількість вершин; назву осей; ексцентриситет; координати фокусів

3.2 параболічна траєкторія виразиться рівнянням: $x^2 = -2py$ точка падіння каменя на землю має координати (10; -10). Таким чином $100 = -2p \cdot (-10)$, а звідси $p = 5$.

Варіант 3

Достатній рівень

Частина II

2.1 геометричне місце точок, однаково віддалених; що має назву центр.

2.2 А–3; Б–2; В–1; Г–4. 2.3 5.

Високий рівень

Частина III

3.1 $\varphi = \arctg \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

3.2 геометричне місце точок; до двох даних точок, що мають назву фокуси є величина постійна.

Варіант 4

Достатній рівень

Частина II

2.1 $(x-a)^2 + y^2 = r^2$. 2.2 еліпс. 2.3 А–3; Б–5; В–3; Г–4.

Високий рівень

Частина III

3.1 (3; -3).

3.2 $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$, піднесемо до квадрату обидві частини цього рівняння: $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$; розкриваємо дужки: $x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$; приводимо подібні і отримуємо: $y^2 = 2px$.

Варіант 5

Достатній рівень

Частина II

2.1 73. 2.2 $y^2 = -8x$. 2.3 А–5; Б–1; В–2; Г–3.

Високий рівень

Частина III

3.1 геометричне місце точок; двох даних точок, називаємих фокусами є величина постійна.

3.2 Якщо півосі еліпса рівні між собою, тобто $a = b$, тоді рівняння еліпса прийме вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$, отримане рівняння визначає коло радіус якого дорівнює a ; $e = \frac{\sqrt{a^2 - a^2}}{a} = 0$.

III Вступ до математичного аналізу

Варіант 1

Достатній рівень

Частина II

2.1 А–5; Б–2; В–4; Г–1. **2.2** 1. **2.3** $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}$.

Високий рівень

Частина III

3.1 залежність змінної y від змінної x ; змінної x відповідає тільки одне значення змінної y .

$$\mathbf{3.2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4(2+\frac{1}{n})^4 - n^4(1+\frac{1}{n})^4}{n^4(2+\frac{1}{n})^4 + n^4(1+\frac{1}{n})^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^4 - (1+\frac{1}{n})^4}{(2+\frac{1}{n})^4 + (1+\frac{1}{n})^4} = \frac{2^4 - 1^4}{2^4 + 1^4} = \frac{15}{17}.$$

Варіант 2

Достатній рівень

Частина II

$$\mathbf{2.1} \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 - 0} \frac{1}{|x|} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 0 + 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$$

2.2 А–3; Б–1; В–4; Г–5. **2.3** 3.

Високий рівень

Частина III

3.1 границя функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює нулю.

3.2 $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 + 0} (x - 1)^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 - 0} x^2 = 0$. З того, що $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$, випливає, що при $x \rightarrow 0$ задана в умові функція границі не має.

Варіант 3

Достатній рівень

Частина II

2.1 3. **2.2** А–5; Б–1; В–4; Г–2. **2.3** 1; 2; 6; 24; 120.

Високий рівень

Частина III

3.1 область її визначення симетрична відносно початку координат; з області визначення виконується рівність $f(-x) = f(x)$.

3.2 нехай $y = f(x)$ – задана функція, причому $f(x) = c$, $c = \text{const}$ для всіх x з деякого околу точки x_0 . Для будь-якої послідовності $\{x_n\}$ такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, одержуємо $f(x_n) = c$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$. Отже, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$.

Варіант 4

Достатній рівень

Частина II

2.1 2. **2.2** А–3; Б–4; В–1; Г–2.

$$2.3 \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \operatorname{tg} x = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Високий рівень

Частина III

3.1 множини всіх точок координатної площини; а ординати – відповідним значенням функції.

$$3.2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Варіант 5

Достатній рівень

Частина II

$$2.1 \text{ 2. } 2.2 \text{ A-3; B-2; B-4; Г-1. } 2.3 a_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}.$$

Високий рівень

Частина III

3.1 для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує додатне число δ таке що; $|f(x) - A| < \varepsilon$.

3.2 розглянемо послідовність значень аргументу функції $\{x_n\}: x_n = \frac{1}{\pi n}, n \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, що $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0$. Розглянемо послідовність відповідних значень функції $\{f(x_n)\}: \cos \pi n = (-1)^n, n \in \mathbb{Z}$. Вона має вигляд $-1; 1; -1; 1; \dots$ і границі при $n \rightarrow \infty$ не існує. Цього достатньо, щоб дійти висновку про те, що в точці $x = 0$ функція $y = \cos \frac{1}{x}$ не має границі.

IV Диференціальне числення функції однієї змінної

Варіант 1

Достатній рівень

Частина II

$$2.1 -1. \quad 2.2 \text{ A-3; B-1; B-5; Г-2; Д-4. } 2.3 24.$$

Високий рівень

Частина III

3.1 приросту функції до приросту аргумента (якщо вона існує) за умови; до нуля.

3.2 $y' = 3x^2 - 6x$; розкладемо двучлен на множники: $y' = 3x(x - 2)$; визначаємо знаки та робимо наступний висновок: функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і $(2; +\infty)$ та спадає на проміжку $(0; 2)$.

Варіант 2

Достатній рівень

Частина II

$$2.1 0. \quad 2.2 \text{ A-1; B-4; B-3. } 2.3 4.$$

Високий рівень

Частина III

3.1 функція $f_1(x)$ диференційована в точці $x \in (a; b)$.

3.2 $y' = 3x^2$; $3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ так як при $x > 0$ і при $x < 0$ похідна залишається додатною, то можна зробити висновок, що при $x = 0$ функція екстремумів не має. В цьому можна переконатись поглянувши і на графік даної функції.

Варіант 3

Достатній рівень

Частина II

2.1 1. 2.2 А–1; Б–5; В–4; Г–2. 2.3 3.

Високий рівень

Частина III

3.1 що має похідну в кожній точці інтервалу $(a; b)$; диференціюванням функції.

3.2 $y' = 4x^3$; $y'' = 0$ при $x = 0$; $y'' > 0$ як при $x < 0$, так і при $x > 0$, отже графік даної функції при $x = 0$ точки перегику не має.

Варіант 4

Достатній рівень

Частина II

2.1 54 кв. од. 2.2 1)–В; 2)–Д; 3)–А; 4)–Б. 2.3 1.

Високий рівень

Частина III

3.1 точка кривої в якій змінюється знак кривизни

3.2 $y' = -2x + 4$; прирівнюємо похідну до нуля $-2x + 4 = 0$; знаходимо абсцису $x = 2$ вершини параболи; підставимо тепер в рівняння параболи значення $x = 2$ та отримаємо ординату вершини $y = 4$, отже вершиною параболи буде точка $M(2; 4)$.

Варіант 5

Достатній рівень

Частина II

2.1 1. 2.2 10. 2.3 А–2; Б–3; В–1.

Високий рівень

Частина III

3.1 в цьому інтервалі вона лежить не нижче (не вище) дотичної прямої в кожній своїй точці; переходить в угнутість (чи навпаки).

3.2 $y' = \frac{1}{4}x^2 - x$; $y'' = \frac{1}{2}(x - 2)$; значення $x = 2$ розбиває проміжок $(-\infty; +\infty)$ на частини: $(-\infty; 2)$ тут $y'' < 0$, $(2; +\infty)$ тут $y'' > 0$; точка перегику має координати $(2; -1\frac{1}{3})$.

V Диференціальне числення функції багатьох змінних

Варіант 1

Достатній рівень

Частина II

2.1 2, 5, 4, 1, 3. 2.2 А–2; Б–3; В–5; Г–4.

2.3 $z'_x = 3x^2y^5 + 7x^6 \sin y$; $z'_y = 5x^3y^4 + x^7 \cos y$.

Високий рівень

Частина III

3.1 який кожній точці $X = (x_1; x_2; \dots x_n)$ множини $E \subset R_n$ ставить у відповідність єдине дійсне число y .

3.2 з означення арксинуса $-1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{12} - 2 \leq 1$. Звідси $-1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{12} \leq$

3. Отже областю визначення цієї функції будуть точки двох еліпсоїдів $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{12} = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{12} = 3$ і точки простору R_3 , які містяться між ними.

Варіант 2

Достатній рівень

Частина II

2.1 – 2. 2.2 А–4; Б–1; В–3. 2.3 $(-1; 2)$ – точка мінімуму.

Високий рівень

Частина III

3.1 з областю визначення $E \subset R_n$; всіх точок $(x_1; x_2; \dots x_n, y) \in R_{n+1}$.

3.2 оскільки $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$ і $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$, то $z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2$. Виявилось, що $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Варіант 3

Достатній рівень

Частина II

2.1 – 1.

2.2 1) знайти стаціонарні точки. У стаціонарних точках, які належать області F , знайти значення функції; 2) дослідити функцію на найбільше значення на межі ∂F ; 3) серед знайдених значень функції вибрати найбільше та найменше.

2.3 $z'_x = \frac{x \cos(x^2 - y^2)}{\sin(x^2 - y^2)}$; $z'_y = \frac{-y \cos(x^2 - y^2)}{\sqrt{\sin(x^2 - y^2)}}$.

Високий рівень

Частина III

3.1 якщо для довільної послідовності точок $M_k(x_k; y_k)$, збіжної до M_0 ;

$\lim_{M_k \rightarrow M_0} f(M_k) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y)$

3.2 тут $F(x; y; z) = e^z + z - x^2y + 1$, $F'_x = -2xy$, $F'_y = -x^2$, $F'_z = e^z + 1$. Отже маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy}{e^z + 1}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{e^z + 1}$.

Варіант 4

Достатній рівень

Частина II

2.1 1. 2.2 А–2; Б–3; В–1. 2.3 – 3.

Високий рівень

Частина III

3.1 існує границя функції в цій точці; $\lim_{\substack{x_k \rightarrow x_0 \\ y_k \rightarrow y_0}} f(x_k; y_k) = f(x_0; y_0)$.

3.2 $z'_x = (x^2 + y^2 + 3x + 7y - 30)'_x = (x^2)'_x + (y^2)'_x + (3x)'_x + (7y)'_x - (30)'_x = 2x + 0 + 3 + 0 - 0 = 2x + 3$; $z'_y = (x^2 + y^2 + 3x + 7y - 30)'_y = 2y + 7$.

Варіант 5

Достатній рівень

Частина II

2.1 2.

2.2 це проекція на площину XOY лінії, яка отримується при перетині графіка функції $z = f(x; y)$ площиною $z = C$.

2.3 1.

Високий рівень

Частина III

3.1 суму добутків частинних похідних цієї функції; $z'_x \Delta x + z'_y \Delta y = z'_x dx + z'_y dy$.

3.2 тут $F(x; y) = y^3 + 2y - 2x$, $F'_x = -2$, $F'_y = 3y^2 + 2$. Отже, $y'_x = -\frac{-2}{3y^2+2}$,

тобто $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3y^2+2}$.

VI Інтегральне числення

Варіант 1

Достатній рівень

Частина II

2.1 10. 2.2 А-2; Б-1; В-4; Г-3. 2.3 1, 4, 5, 2, 3.

Високий рівень

Частина III

3.1 обмежена на відрізку $[a; b]$; розриву

$$3.2 \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x dx \\ x_1 = 0, & u_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & u_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Варіант 2

Достатній рівень

Частина II

2.1 3. 2.2 А-3; Б-2; В-5; Г-6; Д-1. 2.3 24.

Високий рівень

Частина III

3.1 в кожній точці $x \in X$; $F'(x) = f(x)$.

$$3.2 \begin{cases} p = \frac{231}{q+1} \\ p = q + 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{231}{q+1} = q + 11 \\ p = q + 11 \end{cases} \text{Вирішимо перше рівняння системи.}$$

$(q + 1)(q + 11) = 231$, $q^2 + 12q - 220 = 0$, $(q + 22)(q - 10) = 0$. Одержимо $q^* = 10$.

Отже, $p^* = 10 + 11 = 21$. Тоді $CS = \int_0^{10} \frac{231}{q+1} dq - 21 \cdot 10 = 231 \ln(q + 1) \Big|_0^{10} - 210 = 231 \ln 11 - 231 \ln 1 - 210 = 231 \ln 11 - 210 \approx 344$.

Варіант 3

Достатній рівень

Частина II

2.1 12. 2.2 А-3; Б-2; В-1; Г-5. 2.3 $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

Високий рівень

Частина III

3.1 розривна; на [a; b]

3.2 Для визначення споживчих втрат при збільшенні рівноважної ціни товару з 2 грн. до 3 грн. подивимося, як при цьому міняється обсяг продажів. Якщо $P_1=2$, то $Q_1=16$, при $P_2=3$ $Q_2=14$. Отже,

$$\Delta CS = \int_{14}^{16} (10 - 0,5q) dq + 42 - 32 = \left(10q - \frac{q^2}{2} \right) \Big|_{14}^{16} + 10 \\ = 160 - 64 - 140 + 49 + 10 = 15(\text{грн})$$

Варіант 4

Достатній рівень

Частина II

2.1 2. **2.2** А–5; Б–1; В–4; Г–2; Д–6. **2.3** $\frac{x^3}{3} - 1,5x^2 + \ln|x| + C$.

Високий рівень

Частина III

3.1 виробляється з моменту T_1 ; продуктивності

3.2 нехай $t = \sqrt{1+x}$, тоді $t^2 = 1+x \Rightarrow x = t^2 - 1, dx = 2tdt$. Знайдемо межі інтегрування: $t = \sqrt{1+x}: t_x = \sqrt{1+0} = 1; t_x = \sqrt{1+3} = 2$. Отже,

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x} dx = \int_1^2 (t^2 - 1)2t^2 dt = 2 \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \\ 2 \frac{96-40-3+5}{15} = \frac{116}{15} = 7 \frac{11}{15}$$

Варіант 5

Достатній рівень

Частина II

2.1 3. **2.2** А–2; Б–3; В–1.

$$\mathbf{2.3} P = \int_0^8 f(t) dt = \int_0^8 (-t^2 + 8t + 3) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + 4t^2 + 3t \right) \Big|_0^8 = 109 \frac{1}{3} \text{ ум. од.}$$

Високий рівень

Частина III

3.1 скінченну кількість; на цьому відрізку

3.2 $\int \frac{5x^3 dx}{4+x^8} = \frac{5}{4} \int \frac{x^3 dx}{1+\left(\frac{x^4}{2}\right)^2}$. Зробимо заміну: $\frac{x^4}{2} = t; 2x^3 dx = dt, x^3 dx = \frac{dt}{2}$ Отже,

$$\int \frac{5x^3 dx}{4+x^8} = \frac{5}{4} \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{5}{8} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{5}{8} \arctg \frac{x^4}{2} + C$$

VII Диференціальні рівняння

Варіант 1

Достатній рівень

Частина II

$$\mathbf{2.1} \arcsin x + \arcsin y = C. \quad \mathbf{2.2} 1\text{--}B; 2\text{--}B; 3\text{--}A; 4\text{--}Г. \quad \mathbf{2.3} y = \sqrt[3]{3\left(C - \frac{x^2}{2}\right)}.$$

Високий рівень

Частина III

3.1 усім сталим; до загального розв'язку.

3.2 Виконаємо заміну $x + 2y = z$; $y' = \frac{z'-1}{2}$; $z' = \frac{4}{z} - 5$ – це рівняння з відокремлюваними змінними. $\int \frac{zdz}{4-5z} = \int dx$; $-\frac{1}{5}z - \frac{4}{5}\ln|5z-4| = x + C$, отже $-\frac{1}{5}(x+2y) - \frac{4}{5}\ln|5(x+2y)-4| = x + C$.

Варіант 2

Достатній рівень

Частина II

2.1 $m = 1,5$. **2.2** А–5; Б–2; В–1; Г–4. **2.3** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^x$.

Високий рівень

Частина III

3.1 $P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0$; однорідними функціями однакового порядку

3.2 $y(1+x)dx + x(1-y)dy = 0$ поділимо обидві частини рівняння на $xy \neq 0$:

$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$; $x + \ln|x| + \ln|y| - y = C$, тобто $\ln|xy| + x - y = C$.

Варіант 3

Достатній рівень

Частина II

2.1 $y(2) = -2$. **2.2** А–2; Б–5; В–1; Г–3. **2.3** $y = e^{3x}(C_1 + xC_2)$.

Високий рівень

Частина III

3.1 незалежну змінну; похідні різних порядків

3.2 Нехай $y = u \cdot v$, тоді $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, тобто $u' \cdot v + u(v' + 2xv) = 2x$. Спочатку розв'яжемо $v' + 2x \cdot v = 0$: $\frac{dv}{v} = -2xdx$, $\ln|v| = -x^2$, $v = e^{-x^2}$. Тепер $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$; $\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}$, $du = \int 2x \cdot e^{x^2} dx$, $u = e^{x^2} + C$. Отже $y = 1 + C \cdot e^{x^2}$

Варіант 4

Достатній рівень

Частина II

2.1 $\arcsin x + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$. **2.2** 1) $y^{//} = f(y; y')$ 2) $y^{//} = f(x)$.

2.3 $y = e^{2x}(C_1 \cos(\sqrt{2}x) + C_2 \sin(\sqrt{2}x))$

Високий рівень

Частина III

3.1 деякі задані функції; першого

3.2 Складемо характеристичне рівняння: $r^2 - r - 2 = 0$. Знайдемо корені: $r_1 = -1, r_2 = 2$. Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} \Rightarrow y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x}$. $\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$. Отже $y = 3e^{-x} + 5e^{2x}$

Варіант 5

Достатній рівень

Частина II

2.1 $x^2 - y^2 = Cx$. **2.2** А–3; Б–2; В–5; Г–1. **2.3** $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$.

Високий рівень

Частина III

3.1 кількість довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$; введенням інших довільних сталих

3.2 Складемо характеристичне рівняння: $r^2 + 4r + 4 = 0; (r + 2)^2$. Знайдемо корені: $r_1 = r_2 = -2$. Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} \Rightarrow y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 x e^{-2x}$. $\begin{cases} C_1 = 8 \\ -2C_1 + C_2 = 7 \end{cases}$. Отже $y = e^{-2x}(8 + 23x)$

Висновки

Тестові завдання з дисципліни «Вища математика» охоплюють весь матеріал дисципліни, що вивчається. Робота з тестами допомагає студентам перевірити свої знання, вдосконалює пам'ять, увагу, прагнення до покращення результату, самоконтроль.

Тести, відображують інформацію в загальній формі, тому сприяють розвитку вмінь узагальнювати знання, чітко формулювати відповідь. Вони визивають цікавість у студентів, а отже виконують стимулюючу дію.

Студенти привчаються розмірковувати, співставляти, аналізувати, самостійно добувати знання. Подібні методи контролю результатів навчання, виконання яких потребує різноманітного повороту думки, роздумів, самостійності, значною мірою підвищує розумову діяльність та сприяє активізації навчального процесу.

Список використаної літератури:

- 1) Алгебра и начала анализа: [в 2 ч.]. Ч. 1 / Яковлев Г. Н. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
- 2) Барковский В. В., Барковська Н. В. Вища математика для економістів: 5-те вид. Навч. посіб. – К.: Центр учбової літератури, 2010
- 3) Васильченко І. П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання-Прес, 2002. – 454 с.
- 4) Власов В. Г. Конспект лекцій по высшей математике. – М.: Айрис, 1997.
- 5) Жильцов О. Б., Торбін Г. М. Вища математика з елементами інформаційних технологій: Навч. посіб. – 2-те вид., випр. – К.: МАУП, 2004. – 408 с.: іл. – Бібліогр.: с. 401-402.
- 6) Зайцев И. Л. Элементы высшей математики для техникумов. – М.: Наука, 1974. – 416 с.: ил.
- 7) Конспект лекцій по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 1 / Дмитрий Письменный. – 8-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 288 с.: ил.
- 8) Конспект лекцій по высшей математике: [в 2 ч.]. Ч. 2 / Дмитрий Письменный. – 6-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 256 с.: ил.
- 9) Тарасов Н. П. Курс высшей математики для техникумов. – М.: Наука, 1975. – 432 с.: ил.
- 10) Шипачев В. С. Высшая математика: Учеб. для вузов – 8-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 479 с.: ил.