

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
МАЛИНСЬКИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ

Якименко О.Г.

Методичні рекомендації
до виконання практичних робіт з біометрії
для студентів спеціальності
205 Лісове господарство ОС Бакалавр

Розробник:

Якименко Олександр Геннадійович, викладач Малинського фахового, кандидат педагогічних наук

Рецензент:

Свинчук Віктор Адамович, викладач НУБіП, кандидат сільськогосподарських наук

Методичні рекомендації призначені для виконання практичних робіт з дисципліни “Біометрія” студентами спеціальності “Лісове господарство” ОС Бакалавр. Розробка містить практичні розрахунки, коротко наведені теоретичні положення та основні формули для обчислень необхідних біометричних показників, задачі і контрольні питання, виконання яких дозволяє поглибити і закріпити отримані на основі лекційного матеріалу знання.

Розглянуто

цикловою комісією

загальноосвітніх дисциплін

Протокол №__ від _____

Голова комісії Якименко О.Г.

ЗМІСТ

1	ВСТУП.....	4
2	Лабораторна робота №1 Групування результатів спостереження. графіки розподілу.....	5
3	Лабораторна робота № 2 Визначення середньої арифметичної і біометричних показників ряду розподілу.....	7
4	Лабораторна робота №3 Визначення структурних середніх величин – медіани і моди.....	10
5	Лабораторна робота №4 Способи обчислення середньої арифметичної.....	12
6	Лабораторна робота №5 Асиметрія і ексцес	15
7	Лабораторна робота №6 Помилки репрезентативності.....	16
8	Лабораторна робота №7 Визначення числових показників кореляції і їх достовірності.....	19
9	Лабораторна робота №8 Регресійний аналіз. визначення коефіцієнтів регресії.....	23
10	Лабораторна робота №9 Дисперсійний аналіз однофакторних рівномірних і нерівномірних комплексів малих груп.....	25
11	Лабораторна робота № 10 Рішення задач описової статистики засобами MS EXCEL.....	28
12	Лабораторна робота №11 Кореляційний аналіз. аналіз факторів в MS EXCEL.....	32
13	Список використаної літератури.....	35
14	Додатки.....	36

ВСТУП

Біометрія являє собою сукупність математичних методів, застосовуваних у біології і запозичених в основному з області математичної статистики і теорії імовірностей. Але біометрія має свою специфіку, свої відмінні риси і посідає визначене місце в системі біологічних наук. Сучасна біометрія як наука - це розділ біології, змістом якого є планування спостережень і статистична обробка їхніх результатів.

Біометрія виникла з потреб біології і спирається переважно на *індуктивний* метод. Характерною рисою біометрії є також те, що її методи застосовують при аналізі не окремих фактів, а їхніх сукупностей, тобто явищ масового характеру, у сфері яких виявляються закономірності, не властиві одиничним спостереженням. Біометрія необхідна і при вивченні спадковості і повторюваності господарсько важливих ознак, вимірі зв'язків між ними й у багатьох інших випадках.

На сучасному етапі біометрія ґрунтується не тільки на таких математичних дисциплінах, як теорія імовірностей і математична статистика, але і на інформатиці і програмуванні на ПК. Це наближає біометрію до комп'ютерних дисциплін. Використання спеціальних комп'ютерних програм за курсом «Біометрія» знайомить студентів з визначеними видами стандартного програмного забезпечення і підвищує якість навчання.

Методична розробка складене з урахуванням навчальної програми з біометрії. Мета цих рекомендацій, в яких описані стандартні і найбільш часто вживані біометричні методи - закріпити теоретичні знання та набути досвіду математичної обробки даних спостереження. Методрозробка містить практичні розрахункові роботи, в яких відпрацьовуються основні математичні методи обробки масових експериментальних матеріалів, повторюються ключові теоретичні моменти окремих розділів курсу «Біометрія», а також завдання для самостійної індивідуальної роботи.

При підготовці посібника використано досвід інших вузів, наукова та методична література, основний список якої наводиться. Методичні рекомендації підготовлено для студентів коледжу спеціальності "Лісове господарство" ОС Бакалавр

Лабораторна робота №1
ГРУПУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕННЯ.
ГРАФІКИ РОЗПОДІЛУ

Мета роботи: навчитись систематизувати результати спостереження, виявляти властиві досліджуваним ознакам закономірності.

Вступні пояснення. В результаті проведення спостережень над біологічними об'єктами отримують велику кількість фактичного матеріалу. Перш за все його потрібно впорядкувати з метою отримання необхідної інформації. *Спостереження* - це збір первинних даних про об'єкт, який підлягає вивченню. Кожне окреме спостереження називають *варіантою* або датою. *Групування* - це процес систематизації результатів спостережень для отримання закладеної в них інформації, а також виявлення закономірностей, які властиві досліджуваним ознакам.

Однією з форм групування є побудова *статистичних рядів* - рядів числових значень ознаки розміщених в певному порядку.

Для обчислення статистичних показників числових сукупностей досить часто використовують ряд розподілу (*варіаційний ряд*) - подвійний ряд чисел, що складається з класових варіант і відповідних їм чисельностей, розмішених у порядку зростання або спадання. Для побудови ряду розподілу потрібно згрупувати всі варіанти у наперед встановлені інтервали (класи). Величину класового інтервалу можна визначити за формулою Г.А. Стерджеса (1926):

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.32 \ln n} ; \quad (1)$$

Кількість одиниць спостереження в одному класі чи інтервалі називають *чисельностями*, а значення чисельностей, виражене у відсотках - *частковостями*. Загальне число спостережень складає *об'єм* ряду (об'єм вибірки).

Для наочного виявлення закономірностей розподілу кількості варіант стосовно класів, числові ряди зображають графічно.

Найбільш вживаним способом графічного зображення числових рядів є *гістограма, кумулята і огіва*.

Числові показники, які описують мінливість ознак називають *показниками варіацій*. До них відносяться ліміти, розмах варіації, дисперсія, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації (С).

Ліміти - найменша ($x_{\min}$) і найбільша ($x_{\max}$) варіанти.

Розмах варіації (R) - різниця між найбільшою та найменшою варіантами, яка характеризує мінливість ознаки.

Матеріали і обладнання. Листки деревних рослин або чагарників (3-4 види по 50 шт), насіння квіткових культур (наважки – 1 г), лінійки, калькулятори.

Порядок виконання.

Ознайомитись з теоретичною частиною роботи і виконати наступні завдання:

Завдання 1. Заміряти довжину листків дуба, записати в зошит. З отриманих замірів скласти ранжирований варіаційний ряд. Охарактеризуйте як варіює досліджувана ознака. Визначіть ліміти варіації, розмах варіації, величину класового інтервалу.

Завдання 2. Підраховали кількість насінин чорнобривців в 10 однограмових наважках. Отримали наступні дані:

х, кількість насінин, шт	294	267	259	392	258	287	265	300	276	291
-----------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Охарактеризуйте отримані результати. Визначіть чи варіює досліджувана ознака – кількість насінин в 1 г. Згрупуйте дані у варіаційний ряд, визначіть ліміти варіації, розмах варіації, величину класового інтервалу.

Завдання 3. При вивченні особливостей будови крон дерев в журнал занесені такі дані щодо розмірів площ їх горизонтальних проекцій (в м²):

1. 3, 4, 2, 8, 6, 4, 3, 2, 4, 5.
2. 2, 7, 4, 7, 5, 5, 7, 2, 4, 5.
3. 2, 5, 6, 5, 2, 3, 4, 8, 3, 6.
4. 2, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 4, 3, 8.

Розмістіть отримані показники у такому порядку, щоб отримати ранжирований (варіаційний) ряд, визначіть ліміти варіації, розмах варіації, величину класового інтервалу.

Завдання 4. Визначали висоту рослин травостою на лучному газоні через тиждень після скошування. Отримали наступні результати: 22; 23; 22; 22; 17; 23; 20; 20; 21; 25; 27; 24; 22; 21; 16; 23; 18; 21; 24; 18; 21; 22; 25; 23; 21; 20; 25; 18; 21; 21; 24; 25; 19; 18; 22; 25; 27; 19; 17; 18; 22; 23; 24; 19; 26; 21; 25; 25; 23; 27. Розподіліть отриману сукупність в ранжирований варіаційний ряд. Охарактеризуйте як варіює досліджувана ознака. Визначіть ліміти варіації, розмах варіації, величину класового інтервалу.

Завдання 5. В результаті обміру 200 дерев сосни звичайної отримали такі показники: в інтервалі від 2,0 до 5,9 см знаходилося 2 дерева, у інтервалі від 6,0 до 9,9 – 18 дерев, від 10,0-13,9 – 42 дерев, від 14,0-17,9 – 46 дерев, від 18,0-21,9 – 40 дерев, від 22,0-25,9 – 26 дерев, від 26,0-29,9 – 12 дерев, від 30,0-33,9 – 8

дерев, від 34,0-37,9 – 4 дерева, 38,0-41,9 – 2 дерева. Побудуйте таблицю – варіаційний інтервальний ряд розподілу за поданим шаблоном.

Значення класу, см	Серединні значення класу	Частоти (p)	Відносна частота, %	Накопичення частот, %
--------------------	--------------------------	-----------------	---------------------	-----------------------

Визначіть розмах розподілу, відносну частоту (%), і накопичення частот (%). На основі заповненої таблиці намалюйте гістограму, криві – огіву і кумуляту.

Проаналізуйте отримані криві даних. Зробіть висновки.

Контрольні запитання:

1. Варіаційний ряд значень.
2. Ранжування (способи і значення).
3. Графічне вираження розподілів: гістограма, кумулята, огіва.

Лабораторна робота №2

ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ АРИФМЕТИЧНОЇ І БІОМЕТРИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ РЯДУ РОЗПОДІЛУ

Мета роботи: навчитись визначати середні величини і біометричні показники ряду розподілу.

Вступні пояснення. Для повної характеристики однорідної статистичної сукупності використовуються узагальнюючі кількісні характеристики - *статистичні показники*.

Статистичні показники - це логічно обгрунтовані кількісні характеристики, які описують ряди розподілу і дають змогу порівнювати їх між собою.

До статистичних показників ряду розподілу чисельностей відносяться:

Середні параметричні величини (арифметична, квадратична, кубічна, геометрична, гармонічна) і непараметричні – структурні (медіана та мода). Середні величини, як показники центральної тенденції, характеризують центр ряду розподілу.

Середня арифметична ($\bar{x}$) - це величина, яка є центром розподілу, навколо якої групуються всі варіанти статистичної сукупності.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k}{n} = \frac{\sum x}{n} = \frac{1}{n} \sum x; \quad (2)$$

Це і є загальна формула середньої арифметичної, де $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ позначають варіанти, що входять до складу даної сукупності; Σ - знак підсумовування; n - загальне число варіант, або обсяг вибіркової сукупності.

Дисперсія (σ^2) - середній квадрат відхилень варіант від середньої величини, який вказує на характер розсіювання числових значень ознак розподілу чисельностей, а також описує мінливість варіант відносно середнього значення.

Стандартне відхилення (σ) - показник, який характеризує ступінь розсіювання варіант навколо середнього значення, описує криву нормального розподілу і дає уявлення про найбільш ймовірну середню помилку окремого спостереження даної сукупності.

$$S_x(\sigma_x) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}; \quad (3)$$

де Σ - знак підсумовування добутків відхилень варіант x_i від їх середньої $\bar{x}$;

n - загальне число спостережень, або обсяг вибірки.

$(n-1)$ - число ступенів свободи.

Коефіцієнт варіації (v_x) - відносна величина, яка вказує на ступінь мінливості ознаки варіаційного ряду.

$$v_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} * 100\%; \quad (4)$$

при $v_x < 10\%$ - варіація незначна;

при $v_x = 10 - 20\%$ - варіація середня;

при $v_x > 20\%$ - варіація значна.

Дисперсія і стандартне відхилення виражаються в абсолютних величинах досліджуваної ознаки і можуть бути використані для порівняння ступеня мінливості тільки однорідних вибірок (вибірок, варіанти яких мають однакові одиниці вимірювання).

Коефіцієнт варіації виражається у відсотках (%) і може бути використаний для порівняння ступеня мінливості як однорідних так і неоднорідних вибірок.

Порядок виконання.

Опрацювати поданий до роботи теоретичний матеріал та виконати наступні завдання:

Завдання 1. Заміряти довжину листків дуба, записати в зошит. З отриманих замірів скласти ранжирований варіаційний ряд. Охарактеризуйте як варіює досліджувана ознака. Визначити середню арифметичну, дисперсію, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання 2. Визначали якість садово-паркового газону, підраховували густоту травостою - кількість пагонів на 100 см². Отримали наступні результати:

X, шт	68	77	82	59	75	96	48	40	78	88
-------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Зробіть оцінку отриманих результатів, визначіть середню арифметичну, дисперсію, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання 3. Підраховували кількість насінин чорнобривців в 10 однограмових наважках. Отримали наступні дані:

x, кількість насінин, шт	294	267	259	392	258	287	265	300	276	291
--------------------------	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Визначити середню арифметичну, дисперсію, стандартне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання 4.(1). Зробили підрахунок дерев і з'ясували, що на 1 га площі ростуть 120 дерев (перший варіант), у 2 – му варіанті 100 дерев/га, у третьому – 60 дерев/га, у четвертому – 220 дерев /га. Визначити середню арифметичну, дисперсію, стандартне відхилення і коефіцієнт варіації.

Завдання 4.(2). На різних площах ростуть дерева в такій кількості: 100 шт./ 4 га, 120 шт./ 2 га, 60 шт./ 8 га і 220 шт. / 10 га. Визначити середню величину, середньоквадратичне відхилення і коефіцієнт варіації.

Завдання 5. Обміряно 10 діаметрів дерев, які мають значення (см): 8, 12, 18, 16, 8, 14, 12, 12, 14, 16. Визначити середній діаметр дерева за способом розрахунку простої середньої арифметичної і середньої квадратичної. Порівняти дані.

Завдання 6. Об'єми стовбурів 10 дорослих дерев дуба звичайного мають такі значення (м³): 1,2; 4,0; 2,4; 3,6; 0,8; 4,2; 4,6; 3,2; 3,6; 1,4. Визначити середній об'єм стовбура, використовуючи формули визначення простої середньої арифметичної, квадратичної і кубічної середніх. Результати проаналізуйте.

Завдання 7. Вимірювали довжину листків дуба. Результати вимірювань розподілилися наступним чином:

Довжина листка x, см	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Число випадків, p	15	38	55	90	115	153	131	135	114	82	42	15	15

Визначити середнє значення. Зробіть висновки.

Завдання 8. Визначали висоту саджанців сосни європейської (в дм), отримали наступні показники:

<i>X</i>	65	85	105	125	145	165	185	205	225	245	265
<i>P</i>	6	0	4	8	17	27	30	20	10	5	2

Визначіть середнє значення, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Завдання для самостійного опрацювання

Визначити середнє арифметичне в наступних варіаційних рядах:

Завдання 1. Кількість квіток конвалії на одному стеблі:

<i>x</i> , шт	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>p</i>	3	46	270	430	280	96	27	5	1

Завдання 2. Кількість чашолистиків в квітках жовтеця повзучого:

<i>X</i> , шт	3	4	5	6	7
<i>p</i>	1	20	959	18	2

Завдання 3. Висота сосни лапландської (в дм):

<i>X</i> , дм	45	65	85	105	125	145	165	185	205
<i>p</i>	1	4	12	10	20	23	20	8	2

Контрольні запитання:

1. Середнє лінійне відхилення.
2. Дисперсія або варіанса.
3. Середнє квадратичне відхилення.
4. Коефіцієнт варіації.
5. Помилка середньої арифметичної.

Лабораторна робота №3

ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРНИХ СЕРЕДНІХ ВЕЛИЧИН – МЕДІАНИ І МОДИ

Мета роботи: ознайомитися з структурними величинами і способами їх визначення.

Вступні пояснення. До непараметричних середніх величин відносять медіану і моду.

Медіана (Me) - варіанта, яка ділить ряд розподілу наполовину; в обидві сторони від медіани розташовується однакова кількість варіант.

$$Me = x_{min} + i \frac{0,5N - \sum n}{n_e} \quad (5)$$

де x_{min} - нижня межа інтервалу, який містить медіану; i - величина інтервалу; N - чисельність вибіркової сукупності; $\sum n$ - сумарна чисельність до інтервалу, в якому знаходиться серединне значення; n_e - чисельність інтервалу, де знаходиться серединне значення.

Мода (Mo) - варіанта, яка найчастіше зустрічається у даній сукупності. Визначити моду можна за наступною формулою:

$$Mo = X_{min} + i (n_2 - n_1/2n_2 - n_1 - n_3); \quad (6)$$

де X_{min} - нижня межа модального інтервалу; i - величина інтервалу; n_1 - чисельність інтервалу, що знаходиться перед модальним; n_2 - чисельність модального інтервалу; n_3 - чисельність інтервалу, що знаходиться після модального.

Порядок виконання. Алгоритм розрахунку медіани розглянемо на наступному прикладі.

Приклад. Визначення медіани для розподілу:

Клас х	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Частота р	2	0	0	3	4	5	0	6	0	5	4	0	3	0	2

1. Визначаємо, що медіана знаходиться в класі 10, оскільки по обидві сторони від цього класу знаходиться однакова кількість варіант (по 14).

2. За характером класів (х) бачимо, що інтервал класу дорівнює 1, нижня границя класу, де знаходиться медіана – 9,5.

3. Ряд накопичення частот до класу, де знаходиться Me, закінчується числом: $2+3+4+5 = 14$.

4. Частота класу, де знаходиться медіана – 6.

5. За наведеною формулою знаходимо значення медіани.

Використовуючи поданий вище алгоритм розрахунку медіани, а також формули 5 і 6 виконайте наступні завдання:

Завдання 1. Обчисліть для ряду діаметрів моду і медіану.

x_i	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
$n_i (p)$	8	17	33	25	32	31	20	17	8	4	3	2

Завдання 2. Обчисліть моду і медіану для наступного ряду розподілу:

x	3	6	7	8	10	12	13	15	17
p	2	3	4	5	6	5	4	3	2

Завдання 3. Визначити медіану і моду розподілу довжини стеблових листків. Заміри нижче:

3.1.

X	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115	125
p	8	85	166	120	74	35	22	8	6	0	1

3.2

X	38,5	45,5	52,5	59,5	66,5	73,5	80,5	87,5
p	2	8	11	14	13	8	3	3

Контрольні запитання:

1. Непараметричні середні величини.
2. Мода, її визначення.
3. Медіана, її визначення.
4. Способи визначення моди і медіани.
5. Структурні середні величини – децилі і квартили.

Лабораторна робота №4

СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ СЕРЕДНЬОЇ АРИФМЕТИЧНОЇ

Мета роботи: вивчити способи визначення середнього значення

Вступні пояснення

Існують спрощені способи, що дозволяють швидко і точно визначати середню величину. В даній роботі будуть розглянуті наступні: спосіб умовної середньої і спосіб підсумування, визначення середнього значення з декількох середніх та їх помилок, визначення добутоків, часток і різниці між середніми значеннями з врахуванням їх помилок.

Спосіб умовної середньої. Цей спосіб полягає в тому, що значення однієї з варіант (будь-якої) приймається умовно за середню величину варіант даного ряду розподілу. Від цієї варіанти (А) вліво і вправо від неї (або догори і вниз) по ряду розподілу обчислюється відхилення (різниця) значення кожної варіанти від значення обраної варіанти. Якщо значення варіант будуть розміщені у наростаючому порядку, то результати, що розмістяться ліворуч від умовного середнього будуть мати знак "мінус", а праворуч – "плюс". Між значеннями різниці (а) і частотою (р) кожної варіанти (х) визначаються добутки (ра), які також будуть зі знаками "мінус" і "плюс". Ці добутки сумуються (Σpa).

Після цього знаходиться середнє арифметичне значення ($\bar{x}$) як:

$$\bar{x} = A + \frac{\sum pa}{n}; \quad (7)$$

де A – умовна середня, a – різниця між сумами першого і другого неповних рядів накопичених частот одержаних кумуляцією частот з протилежних кінців варіаційного ряду до умовної середньої (A), n – загальне число варіант в даній сукупності.

Спосіб підсумування. Цей спосіб полягає в наступному. З протилежних кінців ряду розподілу до умовної середньої ($A_{ум}$) здійснюється підсумування частот (p). Ці дві частоти варіаційного ряду звуться неповними рядами накопичення частот.

$$\bar{x} = A_{ум} + \frac{d}{n}; \quad (8)$$

де d – сума неповних рядів накопичення частот;

Визначення середнього значення з декількох середніх та їх помилок. В окремих видах дослідів виникає необхідність визначити середнє значення з двох або більшої кількості середніх, які мають свої помилки репрезентативності. В таких випадках середнє значення визначається звичайним шляхом, тобто сумування значень всіх середніх і діленням одержаної суми на їх кількість. Узагальнена (середня) помилка знаходиться за формулою:

$$m_x = \frac{1}{n_i} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_n^2}; \quad (9)$$

Визначення добутків, часток і різниці між середніми значеннями з врахуванням їх помилок. В окремих випадках є необхідність визначити *добуток середніх значень* з їх помилками (10). Для цього застосовується звичайне множення значень середніх.

$$\bar{x}_1 \pm m_1 \times \bar{x}_2 \pm m_2 = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \pm \bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \sqrt{\left(\frac{m_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{\bar{x}_2}\right)^2} \quad (10)$$

Помилка одержаного добутку визначається як:

$$m_n = \bar{x}_1 \times \bar{x}_2 \sqrt{\left(\frac{m_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{\bar{x}_2}\right)^2}; \quad (11)$$

Для визначення частки від ділення середніх значень з врахуванням їх помилок застосовується формула:

$$\frac{\bar{x}_1 \pm m_1}{\bar{x}_2 \pm m_2} = \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \pm \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2} \sqrt{\left(\frac{m_1}{\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{\bar{x}_2}\right)^2}; \quad (12)$$

Різниця між середніми величинами ($x_1 - x_2$) з врахуванням їх помилок визначається так:

$$x_1 \pm m_1 - x_2 \pm m_2 = [x_1 - x_2] \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2}; \quad (13)$$

Порядок виконання. Розглянути способи обчислення середнього значення і виконати такі завдання:

Завдання 1. Для визначення середньої кількості гілок в кільцях сосни досліджено 236 кілець, в яких зафіксовано від 4 до 10 гілок (тобто 4, 5, 6, ... і т.д.). Розподіл 236 кілець за кількістю гілок (тобто частота – p) показав, що з відповідною кількістю гілок (від 4 до 10) зустрічалось від 10 до 64 кілець (таблиця 4.1).

Таблиця 4.1

Розрахунок середньої арифметичної із застосуванням її умовного значення

№	Назва операції	Кількість гілок в кільці						
1	Варіанти (x)	4	5	6	7	8	9	10
2	Частота (p)	25	25	52	48	64	12	10
3	Визначення умовної середньої ($A_{ум}$)							
4	Обчислення відхилення: a							
5	Обчислення добутку: pa							
6	Обчислення сумарних значень:							
7	Визначення середнього арифметичного							

З допомогою поетапних операцій поданих у таблиці розрахуйте середню арифметичну із застосуванням її умовного значення з допомогою способів умовної середньої та підсумування.

Завдання 2. Для визначення середньої маси колосу на полі закладено 4 пробних площадки. На кожній площадці відповідно одержано такі значення середньої маси колоска (г): $10,2 \pm 0,8$; $12,0 \pm 0,6$; $8,2 \pm 0,8$; $14,6 \pm 1,2$. Необхідно визначити за цими даними середнє значення маси колоска з урахуванням середньої помилки.

Завдання 3. Визначити для двох середніх $12,4 \pm 0,64$ і $8,0 \pm 0,56$ добуток, помилку одержаного добутку, частку і різницю між середніми значеннями.

Контрольні запитання:

1. Спосіб умовної середньої.
2. Спосіб підсумування.
3. Визначення середнього значення з декількох середніх та їх помилок.
4. Визначення добутків, часток і різниці між середніми значеннями з врахуванням їх помилок.

Лабораторна робота №5
АСИМЕТРИЯ І ЕКСЦЕС

Мета роботи: отримати навички обчислення асиметрії та ексцесу.

Вступні пояснення. Поряд з практично симетричними розподілами зустрічаються і скошені, асиметричні ряди. Аналітично вони характеризуються порушенням рівності між модою, медіаною і середньою арифметичною розподілу. Графічно вони виражаються асиметричними кривими розподілу. Прийнято розрізняти правосторонню, або негативну, асиметрію і позитивну або лівобічну. У випадках правобічної, або негативної, асиметрії варіанти накопичуються переважно в правій частині ряду; вершина такого ряду зміщена вправо. У разі лівосторонньої асиметрії права гілка кривої, починаючи від вершини, більша за ліву.

Асиметрія (A) – міра відхилення розподілу чисельностей від нормальної кривої симетричного розподілу відносно максимальної ординати. При $A = 0$ – крива симетрична, $A < 0$ – крива має правосторонню асиметрію; $A > 0$ – крива має лівосторонню асиметрію.

Пірсон запропонував оцінювати ступінь асиметрії по різниці між середньою арифметичною і модою, віднесеної до величини середнього квадратичного відхилення:

$$A_s = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}; \quad (14)$$

де A_s - міра скошеності рядів розподілу, або коефіцієнт асиметрії.

Як показник асиметрії також може служити потроєна різниця між середньою арифметичною і медіаною, віднесена до величини середнього квадратичного відхилення, тобто

$$A_s = \frac{3(\bar{x} - M_e)}{\sigma}; \quad (15)$$

Величина цього показника звичайно не виходить за межі -3 і +3, що вказує на негативну чи позитивну асиметрію. При симетричному розподілі коефіцієнт асиметрії дорівнює нулю. Міра косості менше 0,5 вважається малою, від 0,5 до 1 - середньою, вище 1 - великою.

Найбільш досконалим показником асиметрії служить центральний момент третього порядку, віднесений до кубу середнього квадратичного відхилення:

$$A_s = \sum pa^3 / n\sigma^3 \text{ або } A_s = \frac{\sum p(\bar{x} - x_i)^3}{n\sigma^3}; \quad (16)$$

Поряд з симетричними і скошеними розподілами варіаційні ряди можуть бути гостро- і туповершинними. Ця властивість розподілу називається *ексцес*.

Ексцес (E_x) – міра відхилення фактичної кривої від нормальної, яка характеризує ступінь концентрації варіант навколо середнього значення.

Величина ексцесу вимірюється *центральним* моментом четвертого порядку, віднесеним до середнього квадратического відхилення четвертого ступеня.

$$E_x = \frac{\sum p a^4}{n \sigma^4} - 3; \quad (17)$$

Для строго симетричних розподілів ексцес дорівнює нулю. Крива є гостровершинною при $E_x > 0$, а туповершинною - при $E_x < 0$.

При $E_x \leq 0,2$ ексцес практично відсутній. Якщо ж $0,5 \leq E_x \leq 1$, ексцес вважається помітним, але невеликим. Крайній ступінь позитивного ексцесу теоретично безмежний. Граничне значення від'ємного ексцесу дорівнює -2, що вказує на наявність двох варіаційних рядів, тобто рядів із самостійними центрами розподілу, об'єднаних в одній загальній сукупності.

Порядок виконання. Ознайомитися з вступними поясненнями до даної роботи і виконати такі завдання:

Завдання 1. Для варіаційних рядів значень досліджуваних біологічних ознак визначити величину асиметрії та оцінити ступінь скошеності розподілу.

Завдання 2. Визначити величину ексцесу, пояснити його причину.

Значення досліджуваних біологічних ознак варіаційних рядів подані в першій роботі даного посібника.

Контрольні запитання:

1. Нормальний розподіл.
2. Основні властивості нормального розподілу.
3. Асиметрія.
4. Причини асиметрії.
5. Вимірювання асиметрії
6. Ексцес і його вимірювання.

Лабораторна робота №6 ПОМИЛКИ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТІ

Мета роботи: отримати навички визначення достовірності емпіричних показників.

Вступні пояснення. Розходження між величиною середньої арифметичної ($\bar{x}$) вибірки і величиною середньої арифметичної генеральної сукупності (M) називають *помилкою репрезентативності*, тобто помилкою,

що допускається не в самому процесі вимірювальної роботи, а в результаті випадкового відбору варіант із генеральної сукупності при утворенні вибірки.

Величина статистичної помилки окремо взятої варіанти дорівнює квадратичному відхиленню, так як будь-який набутий емпіричний розподіл, що відповідає нормальному закону, практично укладається в межах трьох сігм, тобто $x \pm 3\sigma$. Тому, помилку репрезентативності називають середньою квадратичною помилкою, або просто середньою помилкою (m). Таким чином, середня квадратична помилка окремо взятої варіанти виражається у вигляді $m_x = \pm \sigma$.

Вибіркова середня ($\bar{x}$) відхиляється від свого математичного очікування чи середньої арифметичної (M) генеральної сукупності (теоретично розрахованої) менше в $\sqrt{n}$ разів порівняно з окремими варіантами даного розподілу. Звідси

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (18)$$

Оскільки весь варіаційний ряд випадкової величини, що підпадає нормальному розподілу, практично укладається в межах між $x - 3\sigma$ і $x + \sigma$, то можна відзначити, що генеральна середня (M) таких розподілів не виходить за межі потроєного значення середньої помилки середньої арифметичної будь-якої вибірки, взятої із даної генеральної сукупності, тобто вона знаходиться в межах від $x - 3m_x$ до $x + 3m_x$ або в межах $x \pm 3m_x$. Тому потроєне значення середньої квадратичної помилки називається точною помилкою середньої арифметичної вибіркової сукупності. А вираз $x \pm 3m_x$ містить в собі так звані “правила потроєної помилки”.

При визначенні помилки середньої арифметичної на малих вибірках використовують число “ступеня вільності” ($n - 1$) і формула приймає наступний вигляд:

$$m_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}}; \quad (19)$$

Середня помилка середнього квадратичного відхилення вираховується по формулі:

$$m_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}; \quad (20)$$

Середня помилка коефіцієнта варіації (C) визначається по наступній формулі:

$$m_c = \frac{C}{\sqrt{2n}} \times \sqrt{1 + 2\left(\frac{C}{100}\right)^2}; \quad (21)$$

Середня помилка показника асиметрії визначається по наступній формулі:

$$m_{A_s} = \sqrt{\frac{6}{n}}; \quad (22)$$

або по більш точній формулі: $m_{A_s} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}}; \quad (23)$

Помилку коефіцієнта ексцеса можна вирахувати по наступним аналогічним формулам:

$$m_{E_x} = 2\sqrt{\frac{6}{n}}, \text{ або } m_{E_x} = \sqrt{\frac{24}{n}}; \quad (24, 25)$$

Як і в випадках порівняння вибірових середніх, варіацію між двома середніми квадратичними відхиленнями - σ_1 і σ_2 - оцінюється шляхом нормування, тобто по критерію достовірності:

$$t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{m_\sigma} = \frac{D_\sigma}{m_\sigma}; \quad (26)$$

де m_a - середня квадратична помилка вказаної варіації. Вона вираховується по наступній формулі:

$$m_\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n_1} + \frac{\sigma_2^2}{2n_2}} \quad (27)$$

Порядок виконання. Ознайомитись з визначенням достовірності емпіричних показників. Розрахувати для досліджуваних ознак:

- Помилку окремо взятої варіанти.
- Помилку середньої арифметичної.
- Помилку середнього квадратичного відхилення.
- Помилку коефіцієнта варіації.
- Помилки показників асиметрії і ексцесу.
- Достовірності варіацій між дисперсіями.

Визначати помилки репрезентативності для експериментальних даних завдань лабораторної роботи №2.

Контрольні запитання:

1. Помилка окремо взятої варіанти.
2. Помилка середньої арифметичної.
3. Помилка середнього квадратичного відхилення.
4. Помилка коефіцієнта варіації.
5. Помилки показників асиметрії та ексцесу.
6. Оцінка достовірності відмінностей між дисперсіями.

Лабораторна робота №7
ВИЗНАЧЕННЯ ЧИСЛОВИХ ПОКАЗНИКІВ КОРЕЛЯЦІЇ І ЇХ
ДОСТОВІРНОСТІ

Мета роботи: навчитись визначати числові показники кореляції.

Вступні пояснення. Між морфологічними елементами живих організмів існує певний взаємозв'язок, який полягає в тому, що із збільшенням або зменшенням розміру одного елемента (x) відповідно збільшуються або зменшуються розміри іншого елемента (y).

Залежність, коли певному значенню одного елемента або його ознаки (x) відповідає лише одне значення другого елемента або ознаки (y) зветься *функційною* і визначається як $y = f(x)$. При цьому одна з аналізованих ознак приймається як незалежна (аргумент) (x), друга – як сполучена ознака (y) (функція).

На відміну від функційної *кореляційна* залежність це коли одному значенню даного елемента (x) відповідає декілька значень умовно залежного елемента (y).

Завданням кореляційного аналізу є встановлення форми, напрямку і тісноти зв'язку, а також визначення показників кореляції.

Кореляційний зв'язок розрізняють:

- за формою – прямолінійний або криволінійний;
- за напрямом – прямий (додатній) або зворотній (від'ємний);
- за тісністю – дуже тісний, тісний, значний, помірний, слабкий.

Для визначення особливостей кореляційних зв'язків застосовують такі показники як *коефіцієнт кореляції Пірсона* (r_{yx}), *кореляційне відношення* (η) і *міра криволінійності зв'язку* (K).

Коефіцієнт кореляції - числовий показник простої лінійної кореляції, який описує напрям і тісноту зв'язку між досліджуваними величинами, вимірює зв'язок лише при лінійній формі залежності, а його абсолютне значення знаходиться в межах від -1 до $+1$. При значенні $r = 0$ – зв'язок відсутній; при $+1$ – пряма кореляційна залежність; а при -1 – зворотня.

Якщо функційному зв'язку дати оцінку 1, то віддалення від 1 (0,9; 0,8; 0,7; ... 0,1; 0) буде характеризувати тісноту відповідного кореляційного зв'язку. Показник $r > 0,9$ свідчить про *дуже тісний* зв'язок, $r = 0,7 - 0,9$ – *тісний* зв'язок; $r = 0,5 - 0,7$ – *значний* зв'язок; $r = 0,3 - 0,5$ характеризує *помірний* зв'язок, а $r < 0,3$ – *слабкий* зв'язок.

$$r = \frac{\sum a_x a_y}{n \sigma_x \sigma_y}; \quad (28)$$

У чисельнику цієї формули стоїть сума добутків відхилень варіант від середньої арифметичної по одному ряду (X) на відповідні відхилення варіант від середньої арифметичної по іншому ряду (Y) тобто: $a_x = x_x - \bar{x}_x$ і $a_y = x_y - \bar{x}_y$; $\sum a_x a_y = \sum [(x_x - \bar{x}_x)(x_y - \bar{x}_y)]$

Макет допоміжної таблиці для розрахунків коефіцієнта кореляції:

x	y	a_x $a_x = x_x - \bar{x}_x$	a_y $a_y = x_y - \bar{x}_y$	$a_x a_y$	a_x^2	a_y^2
---	---	----------------------------------	----------------------------------	-----------	---------	---------

Помилка коефіцієнта кореляції:

$$m_r = \pm \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}; \quad (29)$$

де N – об'єм вибірки.

Показник достовірності коефіцієнта кореляції:

$$t = \frac{r\sqrt{(N-2)}}{\sqrt{1-r^2}}; \text{ або } t = r/m_r; \quad (30)$$

Критичне (стандартне) значення критерія $t_{5\%}$ знаходиться з таблиць (додаток 1) за числом ступенів вільності $v = N-2$. Порівнюючи фактичне і критичне значення критеріїв, роблять відповідний висновок:

якщо $t_f > t_{5\%}$ - коефіцієнт кореляції достовірний; встановлену тісноту зв'язку доведено.

якщо $t_f < t_{5\%}$ - коефіцієнт кореляції недостовірний; причиною може бути недостатній об'єм вибірки або відсутність зв'язку.

Кореляційне відношення дорівнює кореню квадратному із співвідношень сум квадратів відхилень групових або часткових середніх (x_y і y_x) від загальних середніх (x і y) до суми квадратів відхилень окремих варіант (x_i і y_i) від загальних середніх даної сукупності. Кореляційне відношення – це числовий показник, який описує тісноту зв'язку при будь-якій формі залежності.

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\frac{\sigma_{yx}^2}{\sigma_y^2}}; \quad (31)$$

кореляційне відношення;

$$\sigma_{yx}^2 = \frac{\sum (y_x - y_c)^2 n_1}{N-1}; \quad (32)$$

дисперсія групових середніх;

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - y_c)^2}{N-1}; \quad (33)$$

дисперсія загальна;

$$m_{\eta} = \pm \sqrt{\frac{(1-\eta^2)}{N-2}}; \quad (34)$$

помилка кореляційного відношення;

$$t = \frac{\eta_{y/x}}{m_{\eta}}; \quad (35)$$

показник достовірності кореляційного відношення.

Значення $t_{5\%}$ беруть з таблиць (додаток) за числом ступенів свободи $\nu = N-2$

при $t_{\phi} < t_{5\%}$ - кореляційне відношення достовірне;

при $t_{\phi} > t_{5\%}$ - кореляційне відношення не достовірне.

Міра криволінійності зв'язку (K)

Для встановлення форми зв'язку використовують показник – міру криволінійності, яку обчислюють за наступною формулою:

$$K = \eta_{yx}^2 - r_{yx}^2; \quad (36)$$

При цьому якщо $K \geq 0,1$ – зв'язок криволінійний;

$K < 0,1$ – зв'язок прямолінійний;

$K = 0$ – зв'язок строго прямолінійний.

Основну помилку і достовірність міри криволінійності визначають за наступними формулами:

$$m_k = \pm \frac{2}{\sqrt{N}} \sqrt{K - K^2(2 - K)} \quad (37)$$

$$t_{\phi} = \frac{K}{m_K} \quad (38)$$

При $t_{\phi} < 3$ – значення достовірне;

$t_{\phi} > 3$ – значення не достовірне.

Порядок виконання. Ознайомитися з теоретичною частиною роботи та виконати наступні завдання:

Завдання 1. Визначити кореляційне відношення між довжиною надземних пагонів (x) і довжиною їх коренів (y). Для цього використовуйте допоміжну таблицю 8.1, шаблон якої поданий нижче.

Завдання 2. Обчислити кореляційне відношення між діаметром (x_i) і висотою (y_i) дерев:

x_i	6	12	14	16	20	22	24	26	28
y_i	8,0	17,3	18,5	18,3	18,5	20,7	28,8	26,2	20,7
			17,5	18,8	18,3	18,8	20,5	29,9	21,5
				18,2		20,6			
				17,8		19,0			

Завдання 3. Обчислити коефіцієнт кореляції для:

x_i	16,6	12,8	15,4	22,3	14,4	22,1	16,5	16,3	20,0	22,1	21,3	14,7	27,4
y_i	17,8	17,3	18,3	19,0	18,5	20,6	18,2	18,8	18,5	18,8	20,7	17,5	20,7

Завдання 4. Проаналізувати тісноту зв'язку між діаметрами і висотами у 10 дерев сосни звичайної.

x_i	19,6	17,7	13,5	21,9	15,1	11,4	21,1	16,4	21,5	19,3
y_i	19,0	18,9	17,4	19,2	19,8	10,7	20,2	19,1	22,1	20,5

Таблиця 8.1.

Визначення кореляційного відношення

Довжина пагона	Довжина кореня	Число спост.	Групові середні	$y_i - y_c$	$(y_i - y_c)^2$	$n(y_i - y_c)^2$	$y_x - y_c$	$(y_x - y_c)^2$
x (см)	y (см)	(n)	y_i , см					
4	3							
	3,1							
5	3,5							
	4,1							
	3,5							
6	4							
	3,5							
	5							
7	5							
	5,3							
							$\Sigma(y_x - y_c)$	$\Sigma(y_x - y_c)^2$

Контрольні запитання:

1. Сумарний показник зв'язку.
2. Функціональна залежність і кореляція.
3. Коефіцієнт кореляції.
4. Кореляційне відношення та визначення його достовірності.
5. Міра криволінійності зв'язку.

Лабораторна робота №8

РЕГРЕСІЙНИЙ АНАЛІЗ. ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ РЕГРЕСІЇ

Мета роботи: навчитись визначати коефіцієнти рівняння прямої $y = a + b x$ та проводити їх оцінку

Вступні пояснення. При оцінці ступеня взаємозв'язку статистичних величин важливо провести математичне моделювання, тобто підібрати аналітичне рівняння, яке відповідало б природі досліджуваного явища з метою передбачення поведінки незалежної характеристики об'єкта при зміні

залежного параметра. Динаміка взаємної залежності між змінними величинами отримала назву регресії, а методика дослідження регресії носить назву *регресійного аналізу*.

Метою регресивного аналізу є встановлення певного виду рівняння, графічне вираження якого (лінія регресії) добре апроксимує розподіл фактичних значень ознаки. Будь-яка залежність може бути описана рівнянням виду: $y = f(x)$, де y - залежна ознака (значення функції), x - незалежна факторна ознака (аргумент функції).

Регресія - це зміна значення функції в залежності від зміни одного або декількох аргументів.

Емпіричний ряд регресії – це подвійний ряд значень ознак аргументу і значень відповідних ознак функції.

Якщо при зростанні чи спаданні аргумента функція також пропорційно зростає чи спадає, регресія є прямолінійною, в іншому випадку - криволінійною.

Найпростішим прикладом регресії є рівняння прямої: $y = a + b x$,

де y - залежна ознака; x - незалежна ознака; a - вільний член рівняння (ордината точки перетину прямої з віссю ординат); b - коефіцієнт лінійної регресії (абсциса точки перетину прямої з віссю абсцис).

Коефіцієнт лінійної регресії (b) - це число, яке вказує напрям і середню величину зміни залежної ознаки при зміні факторної на одиницю виміру. Коефіцієнт b має знак коефіцієнта кореляції. Коефіцієнт a приймає додатне значення, якщо лінія регресії перетинає вісь ОУ над початком координат і від'ємне значення, якщо лінія регресії проходить нижче початку координат. Чим більший коефіцієнт b , тим більший кут нахилу прямої.

До завдання регресивного аналізу належить:

- 1) обчислення коефіцієнтів рівняння;
- 2) встановлення достовірності коефіцієнтів рівняння;
- 3) знаходження теоретичних (найбільш ймовірних) значень залежної ознаки;
- 4) обчислення середньо квадратичного відхилення від регресії (помилка рівняння);
- 5) вирівнювання емпіричних рядів;
- 6) оцінка точності вирівнювання;
- 7) визначення ефекту регресії при вимірюванні варіації залежної ознаки;
- 8) вибір рівняння, яке найбільш точно описує існуючу залежність;
- 9) визначення стандартної помилки обчисленого значення.

При обчисленні коефіцієнтів рівнянь можна використати наступні способи: графічний, спосіб вибраних точок, спосіб найменшої помилки, за центральними відхиленнями, за способом Маркова, за коефіцієнтом кореляції, спосіб найменших квадратів, за числовими коефіцієнтами (спосіб Труля).

В даній роботі пропонується для визначення коефіцієнтів регресії $a_{x/y}$ і $b_{x/y}$ використовують наступні формули:

$$a_{x/y} = y_c - b_{x/y} x_c; \quad (39)$$

$$b_{x/y} = \frac{\sum xy - nx_c y_c}{\sum x^2 - nx_c^2}; \quad (40)$$

Помилку рівняння регресії визначають за формулою:

$$m_{yx} = \sqrt{\frac{\sum (y_i - y_t)^2 n_i}{n - f}}; \quad (41)$$

де $y_i - y_t$ – відхилення фактичних значень результуючої ознаки від теоретичних;

n – кількість пар спостережень;

f – число коефіцієнтів рівняння.

Достовірність коефіцієнта лінійної регресії $a_{x/y}$ визначають за наступними формулами:

коефіцієнта a :

$$t_\phi = \frac{a}{m_{yx} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{x_c}{\sigma_x} \right)^2}}; \quad (42)$$

коефіцієнта b :

$$t_\phi = \frac{b \sigma_x \sqrt{n-1}}{m_{yx}}; \quad (43)$$

де m_{yx} – помилка рівняння регресії;

a – вільний член рівняння;

x_c – середнє значення незалежної ознаки;

σ_x – стандартне відхилення ряду X ;

b – коефіцієнт лінійної регресії;

Порядок виконання. Ознайомитися з основами регресійного аналізу з особливостями визначення коефіцієнтів регресії прямої та параболи. Виконати таке завдання:

Обчисліть коефіцієнти регресії прямої для біологічних ознак:

x_i	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
y_i	14,3	16,5	18,6	19,1	19,5	20,6	20,6	20,7	21,9	22,0	22,7	24,0
n_i	8	17	33	25	32	31	20	17	8	4	3	2

Контрольні запитання:

1. Поняття про регресії.
2. Побудова емпіричних рядів регресії.
3. Рівняння регресії.
4. Коефіцієнти регресії.
5. Способи визначення коефіцієнтів регресії.

Лабораторна робота №9

ДИСПЕРСІЙНИЙ АНАЛІЗ ОДНОФАКТОРНИХ РІВНОМІРНИХ І НЕРІВНОМІРНИХ КОМПЛЕКСІВ МАЛИХ ГРУП

Мета роботи: отримати навички вивчення статистичного впливу одного або декількох факторів на результативну ознаку.

Вступні пояснення. У практиці нерідко виникає необхідність в оцінці цілих комплексів кількісних показників-необхідність порівнювати між собою одночасно не дві, а кілька вибірок, об'єднаних в єдиний комплекс.

В будь-якому експерименті середні значення досліджуваних величин змінюються у зв'язку зі зміною основних факторів (кількісних та якісних), що визначають умови досліду, а також і випадкових факторів. Дослідження впливу тих чи інших факторів на мінливість середніх є *задачею* дисперсійного аналізу, який був розроблений Р. А. Фішером (1925).

Дисперсійний аналіз використовує властивість адитивності дисперсії випадкової величини, що обумовлено дією незалежних факторів. В залежності від числа джерел дисперсії розрізняють *однофакторний* та *багатофакторний* дисперсійний аналіз.

Дисперсійний аналіз полягає у виділенні і оцінці окремих факторів, що викликають зміну досліджуваної випадкової величини. При цьому проводиться розклад сумарної вибіркової дисперсії на складові, обумовлені незалежними факторами. Кожна з цих складових є оцінкою дисперсії генеральної сукупності. Щоб вирішити, чи дієвий вплив даного фактору, необхідно оцінити значимість відповідної вибіркової дисперсії у порівнянні з дисперсією відтворення, обумовленою випадковими факторами. Перевірка значимості оцінок дисперсії проводять по критерію Фішера. Коли розрахункове значення критерію Фішера виявиться меншим табличного, то вплив досліджуваного фактору немає підстав вважати значимим. Коли ж розрахункове значення критерію Фішера виявиться більшим табличного, то цей фактор впливає на зміни середніх.

Факторами звуться причини зміни характеристик біологічних об'єктів, а ті характеристики біологічних об'єктів, які змінюються під їх впливом, звуться *результативними ознаками*.

Методика дисперсійного аналізу зводиться до деякої загальної схеми – алгоритму.

Алгоритм дисперсійного аналізу однофакторних комплексів

№	Зміст організаційної або математичної дії
1	Групування вибірових матеріалів у комбінаційну таблицю дисперсійного комплексу
2	Визначення значень: середнього арифметичного всього комплексу ($\bar{x}$) і групових середніх за градаціями організованого фактора (x_i)
3	Визначення загальної суми квадратів відхилень (D_y), тобто суми квадратів відхилень варіант від загальної середньої: $D_y = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$
4	Визначення міжгрупової суми квадратів відхилень, яка дорівнює сумі квадратів відхилень групових середніх від загальної середньої з урахуванням статистичної ваги (n_i) групових середніх: - у випадку рівних чисел варіант в градаціях комплексу – $D_x = n_i \sum \bar{x}_i^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$; - у випадку різної кількості варіант в градаціях комплексу – $D_x = \sum [n_i (x_i - \bar{x})^2]$;
5	Визначення внутрішньогрупової суми квадратів, тобто суми квадратів відхилень групових варіант від групових середніх: $D_z = \sum x^2 - n \sum \bar{x}_i^2$
6	Визначення дисперсій (середніх квадратів відхилень): - загальна: $\sigma_{заг}^2 = D_y / (N-1)$; - факторна: $\sigma_{факт}^2 = D_x / (a-1)$, де a – кількість груп; - остаточна: $\sigma_{ост}^2 = D_z / (N-a)$
7	Визначення фактичного значення критерію $F_{факт.} = \frac{\sigma_{факт}^2}{\sigma_{ост}^2}$;
8	Порівняння фактичного значення критерію F з його табличним (стандартним) значенням для відповідного рівня значимості (p) і даних чисел

Порядок виконання.

Завдання 1. Користуючись таблицею алгоритму провести дисперсійний аналіз експериментальних даних наведених в прикладі.

Досліджувався вплив кількості доглядів (розпушень ґрунту) на ріст 2-х річних сіянців сосни звичайної після висаджування їх в ґрунт. Дослід організовано на однорідній території з виділенням дослідних площ розміром 0,5 га. Сукупність рослин на кожній дослідній площі є відповідною генеральною сукупністю. Вибіркові сукупності формувались шляхом відбору по 200 сіянців (за принципом імовірності) для кожної дослідної площадки. Дослід закладався в 3-х повторностях з градаціями регульованого фактору (розпушування) – відсутність, два, чотири, шість. Всього закладено 12 пробних площ, на яких у дослідних рослин заміряні восени річні прирости за висотою. Результати замірів згруповані в таблиці 10.1.

Таблиця 10.1

Заміри приросту сіянців сосни звичайної

Варіанти дослідів	Середній приріст рослин за повторностями (варіантами), см				Середній приріст по всіх повторностях
	1	2	3	n_i	
Контроль	6	4	8	3	
Догляди проводилися: два рази	8	8	12	3	
Чотири рази	12	14	16	3	
Шість разів	12	12	12	3	

Однакова кількість повторностей по всіх варіантах дослідів і участь лише одного регульованого фактора підтверджує класифікацію комплексу як однофакторіального і рівномірного.

Завдання 2. Проведіть дисперсійний аналіз вимірів приростів лісових культур у висоту (см/міс) при внесенні різних доз мінеральних добрив.

Варіанти факторів	Повторюваності за варіантами, x_i			
20%	2	4	4	6
40%	3	5	5	6
60%	6	7	7	7

Завдання 3. Провести дисперсійний аналіз впливу на висоту тополевих саджанців заготовки живців.

Фактор (живці різної довжини)	Висота по повторностях					
1	14	22	18	27	6	45
2	26	41	47	32	35	27
3	25	43	28	21	13	26
4	15	16	12	14	20	16

Завдання 4. Вивчався вплив внесення різних доз амонієвої селітри (NH_4NO_3) на приріст дворічних саджанців дуба звичайного в лісовому розсаднику на середньодернових слабоопідзолених ґрунтах Півдня України.

Дози добрив (д. р.), кг / га	Приріст за						n_i	Сума (Σ)	Середній приріст, см
	1	2	3	4	5	6			
Контроль (без добрив)	4	6	8	4	6	5			
5	6	10	14	8	12	12			
10	10	12	18						
15	12	12							
Σ									

Контрольні запитання:

1. Поняття про дисперсійний аналіз.
2. Передумови та постановка задачі однофакторного дисперсійного аналізу.
3. Загальна, факторна та залишкова суми квадратів відхилень та зв'язок між ними.
4. Загальна, факторна та залишкова дисперсії.
5. Алгоритм однофакторного дисперсійного аналізу за Фішером.

Лабораторна робота № 10

РІШЕННЯ ЗАДАЧ ОПИСОВОЇ СТАТИСТИКИ ЗАСОБАМИ MS EXCEL

Мета роботи: освоїти застосування стандартних функцій MS Excel для вирішення задач описової статистики.

Порядок виконання. Ознайомитися з роботою стандартних функцій MS Excel і виконати завдання.

Завдання 1. Проведіть аналіз даних в рамках описової статистики з використанням засобів **Вставка функцій** і **Майстер діаграм** MS Excel.

1. Запустіть MS Excel: **Пуск / Програми / MS Excel** і перейменуйте ярлик робочого аркуша **Лист 1**: подвійне клацання по ярличку і надрукуйте поверх виділення **Статистика 1**. Введіть вихідні дані та заголовки статистичної таблиці за **зразком 1**: виділіть комірку A1 клацанням миші / введіть текст заголовка і зафіксуйте клацанням по інструменту Enter 7 / розташуйте заголовок по центру стовпців A-E - виділіть комірки A1: E1 і натисніть

інструмент **Об'єднати і помістити в центрі** / аналогічно виділяючи послідовно комірки A2 - E11 введіть числа вихідних даних таблиці 10.1:

Таблиця 10.1.

Заміри висоти травостою лучного газону

18	21	20	17	24
17	18	23	24	18
22	22	27	23	17
16	17	22	24	25
22	21	19	20	16
21	23	26	17	22
18	24	15	27	22
24	22	21	24	21
18	19	22	27	24
25	22	17	21	21

В комірках G2 - G14 заголовки рядків статистичної таблиці і число вибірок:

середнє	СРЗНАЧ
Середньоквадратичне відхилення	СТАНДОТКЛОН
Дисперсія	ДИСПА
Медіана	МЕДИАНА
Мода	МОДА
Асиметрія	СКОС
Ексцес	ЕКСЦЕС
Найменше значення	МИН
Найбільше значення	МАКС
Кількість вибірок	50

Виконайте розрахунки зазначених в заголовках рядків статистичної таблиці параметрів, вставляючи при допомозі засобів **Вставка функцій** розрахункові формули. Наприклад, для розрахунку середнього виділіть клацанням миші комірку H2, клацніть інструмент **Вставка функцій** / у вікні **Майстер функцій** в полі **Категорії** клацніть **Статистичні**, в полі **Функція** за допомогою смуги прокрутки перегорніть список назви функцій, знайдіть і клацніть **СРЗНАЧ** і **ОК** / у вікні вставки функції праворуч від поля **Число1** клацніть кнопку згортання / виділіть мишею діапазон комірок A2: E11 (утримуючи ліву кнопку миші) / в згорнутому вікні вставки функції клацніть кнопку розгортання / ОК; аналогічно вставте інші формули.

2. Сформуйте таблицю частот досліджуваної величини, виконавши угруповання даних і розрахунки безпосереднім введенням формул і за допомогою засобу **Вставка функцій**:

- вставте формулу для обчислення мінімального числа інтервалів групування за допомогою засобу **Вставка функцій**: виділіть комірку A14 і введіть «мін. кількість інтервалів », виділіть комірку B14 / інструмент **Вставка функцій** / в полі **Категорії** клацніть **Математичні** / в полі **Функція** знайдіть і виберіть **ОКРУГЛ** і **ОК** / у вікні вставки функції встановіть курсор в полі **Число розрядів** і введіть 0 (округлення до цілого числа), встановіть курсор в поле **Число** і введіть $5 *$ (множник) / в інструменті вибору функції (лівий верхній кут робочої книги) клацніть кнопку списку і виберіть позицію **Інші функції ...** / у вікні **Майстер функцій** виберіть категорію **LOG10** з категорії **Математичні** і **ОК** / у вікні **вставки функції** в поле **Число 1** введіть посилання з числом вибірок **H14** і **ОК**.

- вставте формулу для розрахунку ширини інтервалу за допомогою введення з клавіатури: виділіть комірку A15 і введіть «ширина інтервалу», виділіть комірку B15 / введіть знак = (дорівнює) і знак ((дужка) / клацніть комірку з максимальним значенням H10 і натисніть клавішу F4 для переходу до абсолютної посилання / введіть знак - / клацніть клітинку з мінімальним значенням H9 і натисніть клавішу **F4** / введіть знак (дужка) і знак / (похила риска) і клацніть комірку B14 з числом інтервалів / **Enter**.

- аналогічно в комірці A20-A27 вставте формули для обчислення правих меж інтервалів: клацніть комірку A20, введіть знак = (дорівнює) / клацніть клітинку з мінімальним значенням H9 і натисніть клавішу **F4** для переходу до абсолютної посилання / введіть знак + (плюс) і клацніть комірку з значенням ширини інтервалу B15 / **Enter**; в комірку A21 введіть формулу $= A20 + \$ B \$ 15$; в комірці A22 і нижче розтягніть формулу з комірки A20 за допомогою автозаповнення: після введення формули в A21 вкажіть на нижній правий кут комірки A21 до появи маркера автозаповнення у формі +, натисніть ліву кнопку миші і, утримуючи її, протягніть виділення комірки до A27 і відпустіть кнопку миші.

- вставте формулу для розрахунку частот із застосуванням функції масивів: виділіть діапазон комірок B20-B27 / інструмент **Вставка функцій** / знайдіть і виберіть функцію **ЧАСТОТА** з категорії **Статистичні** та **ОК** / у вікні вставки функції праворуч від поля **Масив даних** клацніть кнопку згортання / виділіть мишею діапазон комірок A2: E11 / клацніть кнопку розгортання / справа від поля **Масив інтервалів** клацніть кнопку згортання / виділіть мишею

діапазон комірок A20: A27 / клацніть кнопку розгортання / одночасно натисніть клавіші **Ctrl, Shift, Enter** для фіксації функції масиву.

3. Побудуйте гістограму для досліджуваної величини із застосуванням майстра діаграм: виділіть діапазон комірок з таблицею частот A20: B27 / інструмент **Майстер діаграм** / на вкладці **Нестандартні** в полі **Тип** виберіть **Графік / Гістограма 2** і кнопка **Далі** / в вікні **Вихідні дані** на вкладці **Діапазон даних** включите перемикач в стовпцях / на вкладці **Ряд** клацніть кнопку згортання праворуч від поля **Підписи по осі X** / виділіть діапазон комірок A20: A27 і клацніть кнопку розгортання / в полі **Підписи другої осі X** внесіть діапазон комірок B20: B27 і кнопка **Далі** / в вікні розміщення діаграми включите перемикач **на наявному листі** і **ОК**.

Завдання 2. Виконайте процедуру генерації випадкових чисел і проаналізуйте їх за допомогою засобів **Аналіз даних** і **Майстер діаграм MS Excel**.

1. Перейдіть на вільний робочий лист книги і перейменуйте його в **Генерація даних**.

2. Підключіть надбудову **Пакет аналізу MS Excel: Сервіс / Надбудови** / в вікні Надбудови встановіть прапорець **Пакет аналізу** та **ОК**.

3. Виконайте генерацію 30 випадкових чисел, розподілених відповідно до нормального закону з нульовим середнім і дисперсією 1: клацніть комірку A1 і **Сервіс / Аналіз даних** / в полі зі списком **Інструмент аналізу** клацніть позицію **Генерація випадкових чисел** і **ОК** / в полі **Число змінних** введіть 1, в поле **Число випадкових чисел** введіть 30, розкрийте список поля **Розподіл** і виберіть позицію **Нормальне**, введіть в полях **Середнє** - 0, **Стандартне відхилення** - 1, в розділі **Параметри виведення** включите перемикач **вихідний інтервал**, клацніть кнопку згортання / клацніть комірку A1 і кнопку розгортання, **ОК**.

4. Змініть розрядність даних, зменшіть число знаків після коми до двох: виділіть діапазон комірок A1: A30 / клацніть інструмент **Зменшити розрядність** чотири рази.

5. Виконайте процедуру описової статистики по згенерованим даним: **Сервіс / Аналіз даних / Описова статистика** і **ОК** / в вікні Описова статистика в полі **Вхідний інтервал** введіть посилання на діапазон комірок A1: A30 / в розділі **Групування** включите перемикач по стовпцях і приберіть прапорець **Мітки в першому рядку** / в розділі **Параметри виведення** включите перемикач **Вихідний інтервал** і клацніть комірку C1 / встановіть прапорець **Підсумкова статистика** і **ОК**.

6. Побудуйте гістограму за даними стовпчика А: **Сервіс / Аналіз даних / Гістограма і ОК** / в вікні Гистограмма в розділі **Вхідні дані** в поле **Вхідний інтервал** введіть посилання на діапазон комірок А1: А30 і встановіть прапорець **Мітки** / в розділі параметри виводу включіть перемикач **Вихідний інтервал** і вкажіть будь-яку вільну комірку робочого листа / встановіть прапорець **Інтегральний відсоток і Висновок графіка і ОК**. Додайте на побудовану гістограму 2 лінії тренда: поліноміальної зі ступенем 4 і змінного середнього на 2 точки: клацніть правою клавішею миші по рядах значень, на контекстному меню вибрати позицію **Додати лінію тренда** / на вкладці тип вибрати **Поліноміальна**, в поле **ступінь** ввести 4 і т.д.

Контрольні запитання:

1. Введення вихідних даних.
2. Обчислення розмаху (варіації),
3. Оцінка середнього, середньоквадратичного відхилення і дисперсії, асиметрії та ексцесу.
4. Побудова таблиці частот і гістограми.

Лабораторна робота №11

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ. АНАЛІЗ ФАКТОРІВ В MS EXCEL

Мета роботи: освоїти застосування стандартних функцій MS Excel для вирішення завдань аналізу зв'язків, застосування пакету аналізу MS Excel для вирішення завдань аналізу зв'язків.

Завдання 1. Проведіть візуальний аналіз даних і розрахунок коефіцієнта кореляції в рамках завдання перевірки наявності зв'язку між двома змінними з використанням засобів **Вставка функцій і Майстер діаграм MS Excel**.

1. Запустіть MS Excel і перейменуйте ярлик робочого листа в **Діаграма розсіювання**.

2. Сформуйте масив вихідних даних результатів вимірювань діаметра і висоти у 10 дерев сосни звичайної за зразком:

x_i 19,6 17,7 13,5 21,9 15,1 11,4 21,1 16,4 21,5 19,3

y_i 19,0 18,9 17,4 19,2 19,8 10,7 20,2 19,1 22,1 20,5

3. Використовуючи засіб **Майстер діаграм**, побудуйте діаграму розсіювання: виділіть діапазон комірок А1: В11 / інструмент **Майстер діаграм** / тип діаграми **Точкова** виду 1 і **Далі** / на вкладці **Діапазон даних** встановіть прапорець **Ряди в стовпцях** і **Далі** / введіть заголовки діаграми **Діаграма**

розсіювання, осі X – діаметр , осі Y – висота дерев / зніміть відображення легенди / встановіть відображення основних і проміжних ліній сітки по обох осях / розташуйте діаграму на наявному листі/ додайте лінійний тренд з включенням відображення рівняння (вкладка **Параметри** вікна **Лінія тренда**).

4. Проаналізуйте отримані дані і зробіть попередній висновок про наявність лінійного зв'язку між розглянутими ознаками.

5. Розрахуйте коефіцієнт кореляції для досліджуваних вибірок. Виділіть клітинку **A12** і введіть текст **Коефіцієнт кореляції** / виділіть комірку **B12** / клацніть інструмент **Вставка функцій** / у вікні **Майстер функцій** в полі **Категорії** клацніть **Статистичні**, в полі **Функція** за допомогою смуги прокрутки перегорніть список назви функцій, знайдіть і клацніть **КОРЕЛЛ** і **ОК** / в полях **Массив1** і **Массив2** введіть послідовно посилання на діапазони **A1: A11** і **B1: B11** відповідно і **ОК**.

6. Перевірте значимість отриманого значення коефіцієнта кореляції за критерієм Стюдента. Виділіть клітинку **A13** і введіть текст **t-статистика** / виділіть комірку **B13** і введіть формулу за зразком = **B12 * КОРЕНЬ (СЧЕТ (A2: A11) -2) / КОРЕНЬ (1-B12 * B12)**. Виділіть клітинку **A14** і введіть текст **Критичне значення**. Виділіть клітинку **B14** і введіть формулу за зразком = **СТЮДРАСПОБР (0,05;СЧЕТ(A2:A11)-2)**. Якщо значення **t** більше табличного (критичного), то приймається наявність значущого лінійного зв'язку (відкидається припущення про відсутність зв'язку).

Завдання 2. Проведіть візуальний і кореляційний аналіз даних в рамках завдання перевірки наявності зв'язку між двома змінними з використанням засобів **Аналіз даних** і **Майстер діаграм MS Excel**.

1. Перейдіть на **Лист 2** книги і перейменуйте його ярличок в **Корел. аналіз**. Скопіюйте попередній приклад на новий лист: виділіть діапазон комірок **A1: B11** листа **Діаграма розсіювання** / клацніть правою кнопкою миші для виклику контекстного меню / **Копіювати** / перейдіть на новий робочий лист / виділіть комірку **A1** / клацніть правою кнопкою миші і **Вставити**.

2. Розрахуйте кореляцію для досліджуваних даних, використовуючи групу **Кореляція** засоби **Аналіз даних: Сервіс / Аналіз даних** / в полі зі списком **Інструмент аналізу** клацніть позицію **Кореляція** і **ОК** / в полі **Вхідний інтервал** введіть посилання на діапазон **A1: B11** / встановіть прапорці в **Групування за стовпцями** і **Мітки в першому рядку** / в полі **вихідний інтервал** вкажіть посилання на клітинку **D1** і **ОК**.

Завдання 3. Проведіть однофакторний дисперсійний аналіз впливу одного фактора на характеристики декількох експериментальних груп з використанням засобів **Аналіз даних MS Excel**.

1. Перейдіть на **Лист 3** книги і перейменуйте його ярличок в **Однофакт. аналіз**.

2. Сформууйте масив вихідних даних впливу на висоту тополевих саджанців заготовки живців за зразком:

Фактор (живці різної довжини)	Висота по повторностях					
1	14	22	18	27	6	45
2	26	41	47	32	35	27
3	25	43	28	21	13	26
4	15	16	12	14	20	16

3. Запустіть процедуру однофакторного дисперсійного аналізу: **Сервіс / Аналіз даних / Однофакторний дисперсійний аналіз** / вкажіть діапазон вхідних значень B2: G16, групування за **стовпцями**, прапорець **Мітки** зніміть, вкажіть клітинку вихідного діапазону комірок **B5**.

4. Проаналізуйте отримані результати: порівняйте дисперсію всередині груп (характеризує вплив випадкової складової) і між групами (характеризує вплив досліджуваного фактора - живці різної довжини). Якщо вони значимо відрізняються (рівень значимості $P = 0,05$), то фактор вважається надає статистично значимий вплив на досліджувану змінну. Порівняйте розрахункове F і критичне значення статистики Фішера. Відмінність вважається значимою, якщо розрахункове значення більше критичного.

Контрольні запитання:

1. Побудова діаграми розсіювання.
2. Розрахунок кореляції за допомогою стандартних функцій MS Excel.
3. Однофакторний дисперсійний аналіз засобами пакету аналізу MS Excel.

Список використаної літератури

1. Булавко Г.И. Биометрия: методические рекомендации к выполнению лабораторных работ/ Г.И. Булавко, О.В. Мусатова. – Витебск: Издательство УО «ВГУ им. П.М.Машерова», 2006 – 30 с.
2. Горошко М. П. Біометрія: Навчальний посібник. / Горошко М. П., Миклуш С.І., Хомюк П.Г. — Львів: Камула, 2004. - 236 с.
3. Горошко М.П. Практикум з лісової біометрії. / Горошко М. П., Миклуш С.І., Хомюк П.Г. - Львів: УкрДЛТУ, 1999. - 108 с.
4. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта: (С основами статистической обработки результатов исследований). / Доспехов Б. А. - М.: Колос, 1979. - 416 с.
5. Лакин Г.Ф. Биометрия: Учебное пособие для биологических специальностей вузов. / Лакин Г.Ф. - М.: Высшая школа, 1980. - 294 с.
6. Калінін М.І. Біометрія: Підручник для студентів вузів біологічних і екологічних напрямків./ Калінін М.І., Єлісєєв В.В. - Миколаїв: Вид-во МФ НаУКМА, 2000. - 204 с.

Стандартні значення критерію Стьюдента

Число ступенів волі $u=n_1+n_2-2$	Критерій Стьюдента t_{st} при імовірності безпомилкового заключення p			
	0.1	0.05	0.02	0.01
1	6.314	12.706	31.821	63.657
2	2.920	4.303	6.965	9.952
3	2.353	3.182	4.541	5.841
4	2.132	2.776	3.747	4.604
5	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.782	2.179	2.684	3.055
13	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.732	2.131	2.602	2.947
16	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.723	2.086	2.528	2.845
21	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.714	2.064	2.492	2.797
25	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.699	2.045	2.462	2.756
30	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	1.645	1.960	2.326	2.576

Значення критерію Фішера F

U ₂	Степінь волі для більшої дисперсії U ₁											
	3	4	5	6	8	10	12	16	24	30	50	∞
5%-ний рівень значущості F _{0,05}												
3	9,3	9,1	9,0	8,9	8,8	8,8	8,7	8,7	8,6	8,6	8,6	8,5
4	6,6	6,4	6,3	6,2	6,0	5,9	5,8	5,8	5,8	5,7	5,7	5,6
5	5,4	5,2	5,1	5,0	4,8	4,7	4,7	4,6	4,5	4,5	4,4	4,4
6	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,1	4,0	3,9	3,8	3,8	3,8	3,7
7	4,4	4,1	4,0	3,9	3,7	3,6	3,6	3,5	3,4	3,4	3,4	3,2
8	4,1	3,8	3,7	3,6	3,4	3,4	3,4	3,2	3,1	3,1	3,0	2,9
9	3,9	3,6	3,5	3,4	3,2	3,2	3,1	3,0	2,9	2,9	2,8	2,7
10	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,7	2,6	2,5
12	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,7	2,6	2,5	2,5	2,4	2,3
16	3,2	3,1	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1	2,0
18	3,2	2,9	2,8	2,7	2,5	2,4	2,3	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9
24	3,0	2,8	2,6	2,5	2,4	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,9	1,7
40	2,8	2,6	2,5	2,3	2,2	2,1	2,0	1,9	1,8	1,7	1,7	1,5
120	2,7	2,4	2,3	2,2	2,0	1,9	1,8	1,7	1,6	1,6	1,5	1,3
∞	2,6	2,4	2,2	2,1	1,9	1,8	1,8	1,6	1,5	1,5	1,4	1,0
1%-ний рівень значущості F _{0,01}												
3	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,0	26,8	26,6	26,5	26,5	26,4	26,1
4	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,5	14,4	14,2	13,9	13,8	13,7	13,5
5	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	10,1	9,9	9,7	9,5	9,4	9,2	9,0
6	9,8	9,2	8,8	8,5	8,1	7,9	7,7	7,5	7,3	7,2	7,1	6,9
7	8,4	7,8	7,5	7,2	6,8	6,6	6,5	6,3	6,1	6,0	5,8	5,6
8	7,6	7,0	6,6	6,4	6,0	5,8	5,7	5,5	5,3	5,2	5,1	4,9
9	7,0	6,4	6,1	5,8	5,5	5,3	5,1	4,9	4,7	4,6	4,5	4,3
10	6,6	6,0	5,6	5,4	5,1	4,9	4,7	4,5	4,3	4,3	4,1	3,9
12	6,0	5,4	5,1	4,8	4,5	4,3	4,2	4,0	3,8	3,7	3,6	3,4
16	5,3	4,8	4,4	4,2	3,9	3,7	3,6	3,4	3,2	3,1	3,0	2,8
20	4,9	4,4	4,1	3,9	3,6	3,4	3,2	3,0	2,9	2,8	2,6	2,4
30	4,5	4,0	3,7	3,5	3,2	3,0	2,8	2,7	2,5	2,4	2,2	2,0
60	4,1	3,6	3,3	3,1	2,8	2,6	2,5	2,3	2,1	2,0	1,9	1,6
120	3,9	3,5	3,2	3,0	2,7	2,4	2,3	2,2	1,9	1,9	1,7	1,4
∞	3,8	3,3	3,0	2,8	2,5	2,3	2,2	2,0	1,8	1,7	1,5	1,0

Критичне значення χ^2 для трьох степенів довірчої імовірності

Число ступенів волі, U	Рівень значущості			Число ступенів волі, U	Рівень значущості		
	0.95	0.99	0.999		0.95	0.99	0.999
1	3.8	6.6	10.8	26	38.9	45.6	54.1
2	6.0	9.2	13.8	27	40.1	47.0	55.5
3	7.8	11.3	16.3	28	41.3	48.3	56.9
4	9.5	13.3	18.5	29	42.6	49.6	58.3
5	11.1	15.1	20.5	30	43.8	50.9	59.7
6	12.6	16.8	22.5	32	46.2	53.5	62.4
7	14.1	18.5	24.3	34	48.6	56.0	65.2
8	15.5	20.1	26.1	36	51.0	58.6	67.9
9	16.9	21.7	27.9	38	53.4	61.1	70.7
10	18.3	23.2	29.6	40	55.8	63.7	73.4
11	19.7	24.7	31.3	42	58.1	66.2	76.1
12	21.0	26.2	32.9	44	60.5	68.7	78.7
13	22.4	27.7	34.5	46	62.8	71.2	81.4
14	23.7	29.1	36.1	48	65.2	73.7	84.0
15	25.0	30.6	37.7	50	67.5	76.2	86.7
16	26.3	32.0	39.3	55	73.3	82.3	93.2
17	27.6	33.4	40.8	60	79.1	88.4	99.6
18	28.9	34.8	42.3	65	89.8	94.4	106.0
19	30.1	36.2	43.8	70	90.5	100.4	112.3
20	31.4	37.6	45.3	75	96.2	106.4	118.5
21	32.7	38.9	46.8	80	101.9	112.3	124.8
22	33.9	40.3	48.3	85	107.5	118.2	131.0
23	35.2	41.6	49.7	90	113.1	124.1	137.1
24	36.4	43.0	51.2	95	118.7	130.0	143.3
25	37.7	44.3	52.5	100	124.3	135.8	149.4